数学

○ **CONTENTS** ○

1　約数と倍数

1 **次の問いに答えよ。**

(1)　18 の正の約数をすべて求めよ。また，18 の正の倍数を，小さいものから 4 個求めよ。

約数　　　　倍数

(2)　4 桁の自然数 6825 は，3 の倍数，4 の倍数，5 の倍数，9 の倍数のいずれであるかを調べよ。

(3)　次の数を素因数分解せよ。また，正の約数の個数を求めよ。

①　45　　　　②　96

素因数分解　　　　素因数分解

約数　　　　約数

2 **次の等式を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を求めよ。**

(1)　$x(y+3)=10$　　　　(2)　$xy+2x-3y+1=0$

3 **次の問いに答えよ。**

(1)　次の数の最大公約数，最小公倍数を求めよ。

①　56，84　　　　②　25，40，75

最大公約数　　　　最大公約数

最小公倍数　　　　最小公倍数

(2)　次の数のうち，互いに素である 2 つの数の組を答えよ。

14，　21，　40，　42

(3)　最大公約数が 8 で，和が 24 となる 2 つの自然数を求めよ。

2　約数と倍数 ～記述

1 整数 a，b がともに 5 の倍数のとき，$2a+3b$ も 5 の倍数であることを証明せよ。

2 $\sqrt{72n}$ が整数になるとき，このような自然数 n のうちで最小のものを求めよ。

3 $x^2-y^2=7$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を求めよ。

4 最大公約数が 12，最小公倍数が 180 である 2 つの自然数をすべて求めよ。

3 整数の分類

1 **次の問いに答えよ。**

(1) 次の a, b について，a を b で割ったときの商と余りを求めよ。

① $a=30$, $b=4$

② $a=-27$, $b=6$

商　　　　余り　　　　商　　　　余り

(2) a, b は整数とする。a を 5 で割ると 1 余り，b を 5 で割ると 2 余る。このとき，次の数を 5 で割ったときの余りを求めよ。

① $a+b$

② $2a+3b$

2 **次の問いに答えよ。**

(1) 2 つの偶数の積は 4 の倍数であることを証明せよ。

(2) n を整数とする。n^2 を 3 で割ったときの余りは 0 または 1 であることを次のように証明した。
$\boxed{}$ に当てはまる数や式をかけ。

〔証明〕 すべての整数は，整数 k を用いて，$3k$, $3k+1$, $3k+2$ のいずれかの形に表される。

〔1〕 $n=3k$ のとき，

$$n^2=(3k)^2=3\cdot 3k^2$$

だから，n^2 を 3 で割ったときの余りは $\boxed{\text{ア}}$ である。

〔2〕 $n=3k+1$ のとき，

$$n^2=(3k+1)^2=\boxed{\text{イ}}=3(\boxed{\text{ウ}})+1$$

だから，n^2 を 3 で割ったときの余りは $\boxed{\text{エ}}$ である。

〔3〕 $n=3k+2$ のとき，

$$n^2=(3k+2)^2=\boxed{\text{オ}}=3(\boxed{\text{カ}})+1$$

だから，n^2 を 3 で割ったときの余りは $\boxed{\text{キ}}$ である。

よって，n^2 を 3 で割ったときの余りは 0 または 1 である。

ア　　　　イ　　　　ウ　　　　エ

オ　　　　カ　　　　キ

3 **次の問いに答えよ。**

(1) 次の $\boxed{}$ に当てはまる 1 桁の自然数をすべて求めよ。

① $17\equiv\boxed{}\pmod 5$

② $-6\equiv\boxed{}\pmod 8$

(2) a, b が整数で，$a\equiv 3\pmod 6$, $b\equiv 4\pmod 6$ のとき，次の数を 6 で割ったときの余りを求めよ。

① $a-b$

② ab

4 整数の分類～記述

1 a, b は整数とする。a を 7 で割ると 2 余り，b を 7 で割ると 4 余る。このとき，a^2+b^2 を 7 で割ったときの余りを求めよ。

2 連続する 2 つの奇数の積に 1 を加えた数は，4 の倍数であることを証明せよ。

3 n を整数とするとき，n^2-n+1 は奇数であることを証明せよ。

4 x を整数とする。$x+5$ を 7 で割ったときの余りが 3 である。次の問いに合同式を利用して答えよ。

(1) x を 7 で割ったときの余りを求めよ。

(2) $2x$ を 7 で割ったときの余りを求めよ。

5 ユークリッドの互除法

1 次の問いに答えよ。

(1) 133 と 304 の最大公約数を，互除法を利用して求める。

次の $\boxed{}$ に当てはまる数を書き入れ，最大公約数を求めよ。

$$304 = 133 \cdot \boxed{ア} + \boxed{イ}$$
$$133 = \boxed{イ} \cdot \boxed{ウ} + \boxed{エ}$$
$$\boxed{イ} = \boxed{エ} \cdot \boxed{オ} + 0$$

ア ____ イ ____ ウ ____

エ ____ オ ____ 最大公約数 ____

(2) 次の 2 つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

① 78，143　　② 161，345

____　　____

2 次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $17x + 5y = 1$ の整数解を 1 組求める。

次の $\boxed{}$ に当てはまる数または式を書き入れ，その結果を利用して整数解を 1 組求めよ。

$17 = 5 \cdot \boxed{ア} + 2$ より，$2 = \boxed{イ}$ …①

$5 = 2 \cdot \boxed{ウ} + 1$ より，$1 = \boxed{エ}$ …②

①を②に代入すると，　$1 = 5 - (\boxed{イ}) \cdot 2$

変形すると，　$1 = 17 \cdot (\boxed{オ}) + 5 \cdot \boxed{カ}$

ア ____ イ ____ ウ ____ エ ____

オ ____ カ ____ 整数解 ____

(2) 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

① $3(x-1) + 2(y+1) = 0$　　② $7x - 3y = 1$

____　　____

3 4 で割ると 1 余り，5 で割ると 3 余る自然数 n のうち，2 桁で最小のものを求めたい。次の(1)〜(3)の順に求めよ。

(1) n を 4 で割ったときの商を x，n を 5 で割ったときの商を y として，x と y についての方程式を作れ。

____

(2) (1)の方程式の整数解を求めよ。

____

(3) 問題の答を求めよ。

____

6 ユークリッドの互除法～記述

1 次の 2 つの数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

(1) 222，481

(2) 574，779

2 方程式 $17x+13y=1$ の整数解を 1 組求めよ。

3 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) $3x-8y=1$

(2) $3x-8y=7$

4 7 で割ると 4 余り，9 で割ると 2 余る自然数のうち，3 桁で最小のものを求めよ。

7 整数の性質の活用

1 次の問いに答えよ。

(1) 次の分数を小数で表せ。循環小数の場合は $0.\dot{3}$ のような表し方で書け。

① $\frac{4}{9}$　　② $\frac{2}{7}$

(2) 次の分数のうち，既約分数はどれか。

$\frac{6}{8}$,　$\frac{7}{10}$,　$\frac{3}{12}$,　$\frac{16}{25}$

(3) 次の分数のうち，有限小数で表されるものはどれか。

$\frac{5}{12}$,　$\frac{7}{20}$,　$\frac{4}{35}$,　$\frac{1}{60}$

2 異なる 6 つの自然数を任意に選ぶとき，この中に 5 で割ったときの余りが等しい 2 数が必ずあることを，次のように証明した。$\boxed{\quad}$ に当てはまる数を答えよ。

〔証明〕 5 で割ったときの余りは $\boxed{\text{ア}}$ のいずれかである。
選ぶ自然数は $\boxed{\text{イ}}$ つであり，対応する余りは $\boxed{\text{ウ}}$ 種類だから，
部屋割り論法により，余りの等しい 2 数が存在する。
よって，異なる 6 つの自然数を任意に選ぶとき，
この中に 5 で割ったときの余りが等しい 2 数が必ずある。

ア　　イ　　ウ

3 次の問いに答えよ。

(1) 214 は，位取りの基礎を 5 として次のように表すことができる。

$$1\times5^3+3\times5^2+2\times5+4=214$$

これを利用して，10 進数 214 を 5 進法で表せ。

(2) 次の数を 10 進数で表せ。

① $102_{(3)}$　　② $34_{(5)}$

(3) 次の 10 進数を［　］内の表し方で表せ。

① 15 ［3 進法］　　② 42 ［5 進法］

8 整数の性質の活用～記述

1 $\dfrac{5}{37}$ を小数で表したとき，小数第 100 位の数字を求めよ。

2 $\dfrac{n}{12}$ が 1 より大きく 2 より小さい既約分数になるような，自然数 n をすべて求めよ。

3 1 から 6 までの整数の中から任意に 4 個の数を選ぶとき，書かれた数の和が 7 になる 2 数が必ずあることを証明せよ。

4 次の問いに答えよ。

(1) 5 進数 $1234_{(5)}$ を 3 進法で表せ。

(2) 次の計算をせよ。

$$13_{(5)}+22_{(5)}$$

9 整数の性質

1 ～ 9 は解答のみ記せ。10 ～ 13 は解答に至る過程も記せ。

1 次の問いに答えよ。

(1) 27 の正の約数をすべて求めよ。また，27 の正の倍数を，小さいものから 4 個求めよ。

約数 ……………… 倍数 ………………

(2) 4 桁の自然数 4128 は，3 の倍数，4 の倍数，5 の倍数，9 の倍数のいずれであるかを調べよ。

………………

(3) 次の数を素因数分解せよ。また，正の約数の個数を求めよ。

① 50 ② 168

素因数分解 ……………… 素因数分解 ………………

約数 ……………… 約数 ………………

2 次の等式を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を求めよ。

$$xy-4x+y+2=0$$

………………

3 次の数の最大公約数，最小公倍数を求めよ。

(1) $2^3\cdot3,\ 2\cdot3^2\cdot5$ (2) 42，63，105

最大公約数 ……………… 最大公約数 ………………

最小公倍数 ……………… 最小公倍数 ………………

4 整数 a を 9 で割ったときの余りは 5 である。a を 3 で割ったときの余りを求めよ。

………………

5 次の数のうち，7 を法として合同な数の組を $a\equiv b \pmod 7$ の形で表せ。

10，16，21，30，43

………………

6 次の 2 つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

(1)　87，145

(2)　148，333

7 方程式 $19x+13y=1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　互除法を利用して，この方程式の整数解を 1 組求めよ。

(2)　この方程式の整数解をすべて求めよ。

8 次の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{7}{11}$ を小数で表せ。循環小数の場合は，$0.\dot{3}$ のような表し方で書け。

(2)　n は 20 以上 30 以下の整数である。$\dfrac{n}{15}$ が既約分数となるような n をすべて求めよ。

9 次の問いに答えよ。

(1)　次の数を 10 進数で表せ。

①　$126_{(7)}$

②　$101010_{(2)}$

(2)　次の 10 進数を［　］内の表し方で表せ。

①　17　［2 進法］

②　234　［5 進法］

10 n を整数とする。$n(2n^2+1)$ は 3 の倍数であることを，n をいくつかに分類することで証明せよ。

11 自然数 n は 4 の倍数であり，また，2 を加えると 5 の倍数となる。
このような n のうちで 2 桁の整数であるものをすべて求めよ。

12 **異なる 8 個の自然数がある。この中から，うまく 2 個を選べば，その 2 個の自然数の差が 7 の倍数となることを証明せよ。**

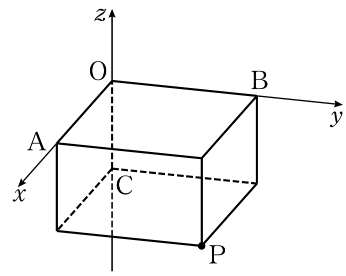
13 **次の問いに答えよ。**

(1) 2 進法で表すと 4 桁になる正の整数は何個あるか。

(2) 整数 a が 2 進法で $1101_{(2)}$，整数 b が 3 進法で $201_{(3)}$ と表されるとき，$a+b$ を 5 進法で表せ。

10 空間の位置の表し方，測量

1 **点 P (6, 8, −5) について，次の点の座標を答えよ。**



(1) 点 P を通り x 軸，y 軸，z 軸と垂直に交わる平面がそれぞれ座標軸と交わる点 A，B，C

(2) 点 P から xy 平面に垂線 PQ を引いたときの点 Q

(3) 点 P から yz 平面に垂線 PR を引いたときの点 R

(4) 点 P から zx 平面に垂線 PS を引いたときの点 S

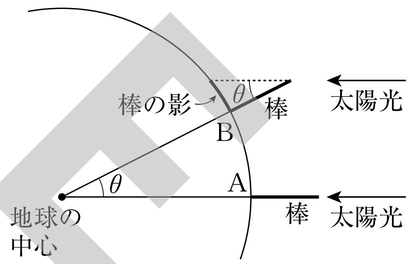
(5) 点 P を，x 軸方向に 1，y 軸方向に −2 だけ移動した点 T

2 **平らな広場の地点 O を原点として，東の方向を x 軸の正の向き，北の方向を y 軸の正の向き，真上の方向を z 軸の正の向きとする座標空間を考える。また，1 m を 1 の長さとする。**
例えば，地点 O から東に 1 m，北に 2 m進み，真上に 3 m上がった点の座標は (1, 2, 3) である。
このとき，次の点の座標を答えよ。

(1) 地点 O から東に 7 m，北に 3 m 進み，真上に 5 m 上がった位置にある点

(2) 地点 O から西に 6 m，北に 4 m 進み，真下に 9 m 下がった位置にある点

3 **古代ギリシャの数学者は，地球のおよその半径を計算によって求めていたといわれる。これにならって，次のような場面で地球の半径を推定する。**
地球上で，800 km 離れた 2 地点 A，B に 10 mの棒を立てたところ，同じ時刻において，A では影がなく，B では影の長さが 1.3 mであった。次の手順で地球の半径を求めよ。



(1) 右上の図の θ において，$\tan\theta$ の値を求め，右の三角比の表から，θ の大きさを求めよ。

［三角比の表］

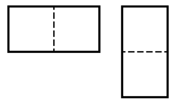
θ	$\tan\theta$
6.5°	0.1139
7.0°	0.1228
7.5°	0.1317
8.0°	0.1405
8.5°	0.1495

(2) 地球の半径はおよそ何 km か。円周率 π は 3.14 として計算し，十の位を四捨五入して表せ。

11 数学とゲーム

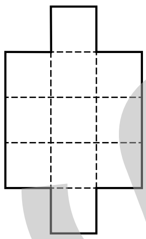
1 **2つの正方形からできる長方形の形をしたタイルをドミノという。このドミノ1つの中の正方形を何個か並べてできる平面図形が与えられたとき，その図形上にドミノを，重ねず，すき間なく敷き詰めることが可能かどうかを考えてみよう。**

ドミノ

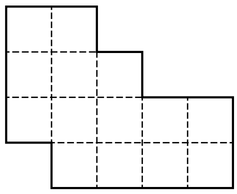


次の図形上にドミノを，重ねず，すき間なく敷き詰めることができるかどうかを調べよ。それができるなら方法を1つ示し，できないならその理由を説明せよ。ただし，与えられた図形は，ドミノ1つの中の正方形を何個か並べてできた平面図形である。

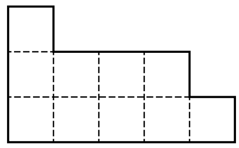
(1)



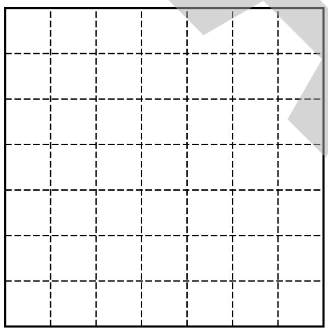
(2)



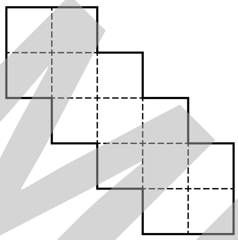
(3)



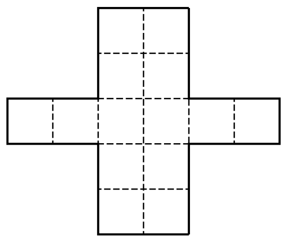
(4)



(5)



(6)



2 **小石をAの列に2個，Bの列に3個並べ，次のルールに従って2人でその小石を交互に取り合うゲームを考える。**

A ● ●
B ● ● ●

Ⅰ　1回に取ることができるのは片方の列の石のみで，1回に1個以上何個でも取ることができる。

Ⅱ　最後に石を取った方が勝ちである。

(1) 先手が初手で次のように石を取ったとき，後手がうまく手を選べば必ず後手の勝ちとなる。その理由を説明せよ。

① Aから1個の石を取る

② Bから2個の石を取る

(2) 先手が初手でどのような手を選べば，その後，後手の手に関係なく勝つことができるか。その方法を説明せよ。