数学A

本書の構成と特色

　このテキストは，高校数学を学習する諸君のために，数学の基本の習得から，ハイレベルな思考力の養成までできるように，工夫して編集してあります。

単元の構成

　数学Ａの学習領域を中心に，数学Ｂの学習範囲も見える形で単元が配列されています。

数学Ａの学習領域

　全体は，大きく次の３つのまとまりに分かれており，それぞれが５～６の単元に分かれています。

❶　場合の数と確率
❷　整数の性質
❸　図形の性質

　各単元は，**ポイント → 確認問題 → 練成問題Ａ → 練成問題Ｂ**の順に構成されています。
また，大きなまとまりごとに，「**まとめの単元**」と，次の段階で何を学習するかがわかるような「**発展学習（☆で表示）**」が設けられています。

●ポイント	その単元で学習する項目を細かく分類し，それぞれについての用語の解説や，基本的な問題の解法から，応用問題までを扱っています。
●確認問題	**ポイント**で学習したことを，実際に問題を解きながら理解していくようになっています。
●練成問題Ａ	**ポイント → 確認問題**で扱われた項目のうち，基本的なものの定着をみるための問題で，練成問題Ｂを行うための必要最低限の問題です。未定着の場合には，もう一度**ポイント**に戻ることができます。
●練成問題Ｂ	**ポイント**で扱われた項目のうち，応用的なものや，基本を組み合わせた問題が扱われています。
●～のまとめ	大きな単元のまとまりの終了時に，それらが完全に定着したかどうかを確認するための問題です。各学習領域の代表的な問題で構成されています。また，大学入試問題も掲載してあります。
●発展学習	大きな単元のまとまりが，次の段階ではどのように扱われていくかがわかる構成になっています。次の段階での内容を概観することにより，単元の学習内容の定着度がはかれます。

SAMPLE

目次

SAMPLE

CONTENTS

SAMPLE

1 集合の要素の個数

学習日　　月　　日

Point 0 集合とその表し方

＊集合について詳しくは，数学Ⅰの「数と式」で学習する

● **集合**……範囲がはっきりしたものの集まりを**集合**といい，集合を構成している１つ１つのものを集合の**要素**という。a が集合 A の要素であることを $\boldsymbol{a \in A}$，a が集合 A の要素でないことを $\boldsymbol{a \notin A}$ と表す。

また，集合を表すには，次の２つの方法がある。

1 要素を書き並べる方法

2 要素の満たす条件を示す方法

例 １から８までの自然数の集まりを，集合 A とする。

５は集合 A の要素だから，　$5 \in A$

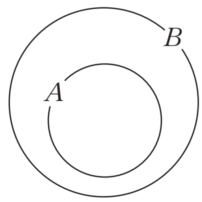
10 は集合 A の要素でないから，$10 \notin A$

また，集合 A を

1 要素を書き並べる方法で表すと，　$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

2 要素の満たす条件を示す方法で表すと，$A=\{x \mid x$ は自然数，$1 \leqq x \leqq 8\}$

● **部分集合**……集合 A のすべての要素が集合 B に属しているとき，A を B の**部分集合**といい，$\boldsymbol{A \subset B}$ または $\boldsymbol{B \supset A}$ で表す。



例 $A=\{2,\ 4,\ 5\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ のとき，$A \subset B$

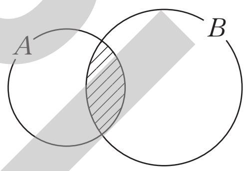
● **空集合**……要素が１つもない集合を**空集合**といい，記号 $\boldsymbol{\phi}$（ファイ）で表す。

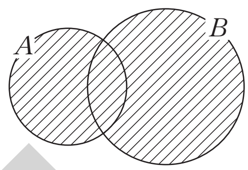
どのような集合 A についても，空集合 ϕ はその部分集合と考える。

● **共通部分と和集合**

集合 A，B のどちらにも属する要素全体の集合を，A と B の**共通部分**といい，$\boldsymbol{A \cap B}$ で表す。

集合 A，B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を，A と B の**和集合**といい，$\boldsymbol{A \cup B}$ で表す。



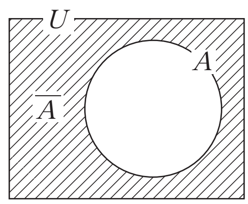


例 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ について，

$A \cap B=\{2,\ 4\}$　　$A \cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$

● **全体集合**……集合を考えるとき，１つの集合 U を最初に決めて，その部分集合を考えることが多い。このとき，U を**全体集合**という。

● **補集合**……全体集合 U の部分集合 A に対して，A に属さない U の要素全体の集合を，U に関する A の**補集合**といい，$\boldsymbol{\overline{A}}$ で表す。



例 $U=\{x \mid x$ は 10 以下の自然数$\}$ を全体集合とするとき，

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9\}$ について，

$\overline{A}=\{2,\ 4,\ 7,\ 8,\ 10\}$

● **補集合の性質**……$A \cap \overline{A}=\phi$，$A \cup \overline{A}=U$，$\overline{\overline{A}}=A$

● **ド・モルガンの法則**

① $\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}$　　② $\overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}$

SAMPLE

Point ❶ 集合の要素の個数

● **有限集合・無限集合**……要素の個数が有限である集合を**有限集合**といい，無限に多くの要素からなる集合を**無限集合**という。

● **集合の要素の個数**……集合 A が有限集合のとき，その要素の個数を $n(A)$ で表す。

例 $A=\{x \mid x$ は 16 の正の約数$\}$ のとき，$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$ より，$n(A)=5$

● **和集合・補集合の要素の個数**

① $\boldsymbol{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)}$

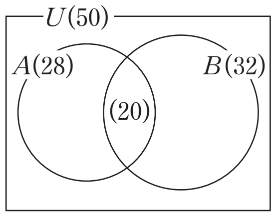
とくに，$A\cap B=\phi$ のとき，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

② $\boldsymbol{n(\overline{A})=n(U)-n(A)}$ ただし，U は全体集合

例 全体集合 U の部分集合 A，B について，

$n(U)=50$，$n(A)=28$，$n(B)=32$，$n(A\cap B)=20$ であるとき，

$$n(A\cup B)=28+32-20$$
$$=40$$
$$n(\overline{A})=50-28$$
$$=22$$



確認問題 1 **Point ❶ の 例 の全体集合 U と，その部分集合 A，B について，次のものを求めよ。**

□(1) $n(\overline{B})$　　□(2) $n(\overline{A\cup B})$　　□(3) $n(\overline{A}\cap\overline{B})$

Point ❷ 倍数の個数

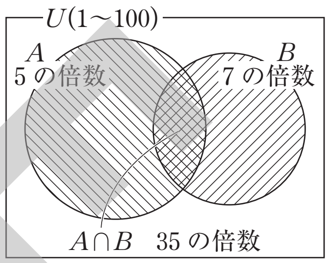
例題 **100 以下の自然数のうち，次のような数の個数を求めよ。**

(1) **5 の倍数でないもの**　　(2) **5 の倍数または 7 の倍数であるもの**

解答 100 以下の自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で 5 の倍数全体の集合を A，7 の倍数全体の集合を B とする。

$A=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot20\}$ より，$n(A)=20$

$B=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ 7\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot14\}$ より，$n(B)=14$



(1) $n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

$=100-20=80$　　**答** 80 個

(2) $A\cap B$ は，35 の倍数全体の集合であるから，

$A\cap B=\{35\cdot1,\ 35\cdot2\}$ より，$n(A\cap B)=2$

よって，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=20+14-2=32$　　**答** 32 個

確認問題 2 **100 以下の自然数のうち，次のような数の個数を求めよ。**

□(1) 4 の倍数でないもの　　□(2) 4 の倍数または 6 の倍数であるもの

□(3) 6 の倍数であるが 4 の倍数でないもの　　□(4) 4 の倍数でも 6 の倍数でもないもの

SAMPLE

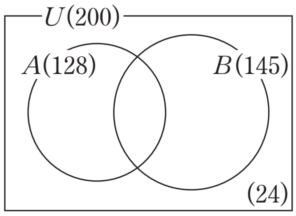
Point ❸ 集合の応用

例 題 **ある高校の 1 年生 200 人のうち，運動部に入っている生徒は 128 人，文化部に入っている生徒は 145 人であり，運動部にも文化部にも入っていない生徒は 24 人であった。**

(1) 運動部と文化部の両方に入っている生徒の人数を求めよ。

(2) 運動部に入っているが，文化部に入っていない生徒の人数を求めよ。

解 答 1 年生 200 人の集合を全体集合 U，運動部に入っている生徒の集合を A，文化部に入っている生徒の集合を B とすると，



$n(U)=200$，$n(A)=128$，$n(B)=145$，$n(\overline{A}\cap\overline{B})=24$

(1) $n(A\cup B)=n(U)-n(\overline{A\cup B})$

$=n(U)-n(\overline{A}\cap\overline{B})$

$=200-24=176$

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=128+145-176=97$（人） 　　答 97 人

(2) $n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)$

$=128-97=31$（人） 　　答 31 人

別 解 右のような人数の表を作って求めると，

①は，$n(\overline{A})=200-128=72$

②は，$n(\overline{A}\cap B)=72-24=48$ となるので，

(1) $n(A\cap B)=145-48=97$

(2) $n(A\cap\overline{B})=128-97=31$

	B	$\overline{B}$	合計
A	(1)	(2)	128
$\overline{A}$	②	24	①
合計	145		200

確認問題 3 次の問いに答えよ。

□(1) 数学と英語の試験を行った。数学と英語ともに合格した者が 21 人，どちらか 1 教科だけ合格した者が 43 人いる。数学に合格した者が 30 人であるとき，英語に合格した者は何人か。

□(2) 50 人の生徒に，A，B 2 種類の本を読んだかどうか尋ねたところ，A を読んだ生徒が 27 人，B を読んだ生徒が 32 人，A も B も読んだ生徒が 15 人いた。このとき，次のような生徒の人数を求めよ。

□① A も B も読んでいない生徒 　　□② A だけ読んだ生徒

□(3) 400 人の人に 2 つの提案 a，b をしたところ，a に賛成の人は 254 人，b に賛成の人は 288 人，a にも b にも賛成でない人は 75 人であった。a に賛成の人の集合を A，b に賛成の人の集合を B とするとき，右の表の空らんをうめ，次の人数を求めよ。

	B	$\overline{B}$	合計
A			254
$\overline{A}$		75	
合計	288		400

□① a にも b にも賛成の人

□② b にだけ賛成の人

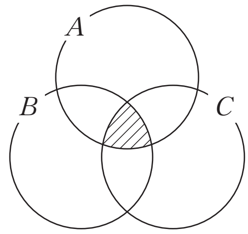
SAMPLE

Point 4　3つの集合の要素の個数

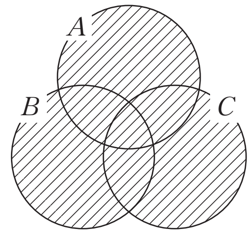
3つの集合の共通部分

集合 A，B，C のどれにも属する要素全体の集合を **A，B，C の共通部分**といい，$A\cap B\cap C$ で表す。

$A\cap B\cap C$



$A\cup B\cup C$



3つの集合の和集合

集合 A，B，C の少なくとも 1 つに属する要素全体の集合を **A，B，C の和集合**といい，$A\cup B\cup C$ で表す。

例　$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$，$C=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ について，

$$A\cap B\cap C=\{4\}$$
$$A\cup B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$$

3つの集合の要素の個数

A，B，C を有限集合とするとき，

$$\boldsymbol{n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)}$$

例　100 以下の自然数のうちで，2 または 3 または 5 で割り切れる数の個数

100 以下の自然数全体の集合を全体集合 U，U の部分集合で，2 の倍数全体，3 の倍数全体，5 の倍数全体の集合をそれぞれ A，B，C とすると，

$$A=\{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 2\cdot50\}$$
$$B=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot33\}$$
$$C=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot20\}$$
$$A\cap B=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot16\}$$
$$B\cap C=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 15\cdot6\}$$
$$C\cap A=\{10\cdot1,\ 10\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 10\cdot10\}$$

また，　$A\cap B\cap C=\{30\cdot1,\ 30\cdot2,\ 30\cdot3\}$

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$
$$=50+33+20-16-6-10+3=74\ (個)$$

確認問題 4　次の問いに答えよ。

□(1)　全体集合を $U=\{x\mid x$ は 10 以下の自然数$\}$ とする。$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$，$B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，$C=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ について，次の集合を求めよ。

□①　$A\cap B\cap C$　　□②　$A\cup B\cup C$　　□③　$A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

□(2)　1000 以下の自然数で，次のような数の個数を求めよ。

□①　4 または 6 または 10 で割り切れるもの

□②　4，6，10 のいずれでも割り切れないもの

SAMPLE

練成問題 A

1 **集合 U の部分集合 A，B について，$n(U)=40$，$n(A)=25$，$n(B)=18$，$n(A\cup B)=30$ であるとき，次の値を求めよ。**

➡ Point ❶

□(1)　$n(A\cap B)$

□(2)　$n(\overline{A})$

□(3)　$n(\overline{A}\cup\overline{B})$

□(4)　$n(\overline{A}\cup B)$

2 **1 から 100 までの自然数のうち，次のような数の個数を求めよ。**

➡ Point ❷

□(1)　5 の倍数でないもの

□(2)　5 の倍数または 6 の倍数であるもの

□(3)　5 の倍数であるが 6 の倍数でないもの

□(4)　5 の倍数でも 6 の倍数でもないもの

3 **50 以上 100 以下の自然数のうち，次のような数の個数を求めよ。**

➡ Point ❷

□(1)　6 で割り切れるもの

□(2)　6 または 8 で割り切れるもの

□(3)　6 でも 8 でも割り切れないもの

□(4)　8 で割り切れるが 6 で割り切れないもの

4 **A，B 2 つの試験を 40 人の生徒に行ったところ，A に合格した生徒は 31 人，B に合格した生徒は 27 人であった。また，A，B とも不合格であった生徒は 3 人であった。このとき，次の問いに答えよ。**

➡ Point ❸

□(1)　A，B とも合格した生徒は何人か。

□(2)　B だけに合格した生徒は何人か。

5 **あるクラスの生徒 35 人のうち，めがねを使用している人は 12 人で，そのうち 5 人はめがねとコンタクトレンズの両方を使用している。また，めがねとコンタクトレンズのどちらも使用していない人は 13 人である。このとき，次の問いに答えよ。**

➡ Point ❸

□(1)　めがねとコンタクトレンズのうち少なくとも一方を使用している生徒は何人か。

□(2)　コンタクトレンズを使用している生徒は何人か。

SAMPLE

練成問題 B

1 **次の問いに答えよ。**

□(1)　集合 A，B について，$n(A)+n(B)=10$，$n(A\cup B)=7$ であるとき，$n(\overline{A}\cap B)+n(A\cap\overline{B})$ の値を求めよ。

□(2)　3 桁の自然数のうち，3 と 8 のどちらか一方だけで割り切れるものの個数を求めよ。

2 **ある町でスポーツ観戦に関するアンケート調査を行い，200 人から回答を得た。その結果，野球に関心があると答えた人は 93 人であった。また，野球とサッカーの 2 つの競技のうち，一方だけに関心があると答えた人は 73 人，どちらにも関心がないと答えた人は 75 人であった。このとき，次の問いに答えよ。**

□(1)　野球とサッカーの両方に関心があると答えた人は何人か。

□(2)　サッカーに関心があると答えた人は何人か。

3 **次の問いに答えよ。**

□(1)　ある高校の 1 年生 150 人のうち，通学にバスを利用している生徒は 52 人，電車を利用している生徒は 61 人いる。通学にバスも電車も利用していない生徒は少なくとも何人いるか。

□(2)　38 人の生徒が A，B 2 問の問題を解いた。問題 A ができた生徒は 29 人，問題 B ができた生徒は 21 人であったという。

□①　問題 A，B の両方ができた生徒は少なくとも何人いるか。

□②　問題 A，B が両方ともできなかった生徒は，最大で何人であるか。

4 **何人かの生徒に英語と数学の試験をしたところ，英語の不合格者は 17 名で，英語と数学がともに不合格であった者は全体のちょうど $\frac{1}{8}$ で，英語と数学がともに合格した者は全体のちょうど $\frac{5}{6}$ であった。このとき，全体の人数および数学の合格者の人数を求めよ。**

□

5 **ある学校で英語，国語，数学の試験を 100 人の生徒が受けた。その結果，英語，国語，数学の合格者はそれぞれ 81 人，77 人，72 人であった。また，英語と国語に合格したのは 65 人，国語と数学に合格したのは 58 人，英語と数学に合格したのは 63 人で，さらに 3 教科すべて合格したのは 52 人であった。このとき，次の問いに答えよ。**

□(1)　数学だけが不合格であったのは何人か。

□(2)　数学だけ合格したのは何人か。

□(3)　3 教科とも不合格であったのは何人か。

6 **200 以下の自然数で，次のような数の個数を求めよ。**

□(1)　3，5，7 のどれかで割り切れるもの

□(2)　105 との公約数が 1 だけであるもの

SAMPLE