

● ● 数学 A

本書の構成と特色

このテキストは、高校数学を学習する諸君のために、数学の基本の習得から、ハイレベルな思考力の養成までできるように、工夫して編集してあります。

●単元の構成

数学Aの学習領域を中心に、数学Bの学習範囲も見える形で単元が配列されています。

●数学Aの学習領域

全体は、大きく次の3つのまとまりに分かれており、それぞれが5～6の単元に分かれています。

- ① 場合の数と確率
- ② 整数の性質
- ③ 図形の性質

各単元は、ポイント → 確認問題 → 練成問題A → 練成問題Bの順に構成されています。

また、大きなまとまりごとに、「まとめの単元」と、次の段階で何を学習するかがわかるような「発展学習(☆で表示)」が設けられています。

- | | |
|--------|---|
| ●ポイント | その単元で学習する項目を細かく分類し、それぞれについての用語の解説や、基本的な問題の解法から、応用問題までを扱っています。 |
| ●確認問題 | ポイントで学習したことを、実際に問題を解きながら理解していくようになっています。 |
| ●練成問題A | ポイント → 確認問題で扱われた項目のうち、基本的なものの定着をみるための問題で、練成問題Bを行うための必要最低限の問題です。未定着の場合には、もう一度ポイントに戻ることができます。 |
| ●練成問題B | ポイントで扱われた項目のうち、応用的なものや、基本を組み合わせた問題が扱われています。 |
| ●～のまとめ | 大きな単元のまとまりの終了時に、それらが完全に定着したかどうかを確認するための問題です。各学習領域の代表的な問題で構成されています。また、大学入試問題も掲載してあります。 |
| ●発展学習 | 大きな単元のまとまりが、次の段階ではどのように扱われていくかがわかる構成になっています。次の段階での内容を概観することにより、単元の学習内容の定着度がはかれます。 |

目次

第1章 場合の数と確率

① 集合の要素の個数 4

- ポイント0 集合とその表し方
- ポイント1 集合の要素の個数
- ポイント2 倍数の個数
- ポイント3 集合の応用
- ポイント4 3つの集合の要素の個数

② 場合の数 10

- ポイント1 樹形図
- ポイント2 和の法則
- ポイント3 積の法則
- ポイント4 順列
- ポイント5 順列の応用
- ポイント6 円順列
- ポイント7 重複順列

③ 組合せ 20

- ポイント1 組合せ
- ポイント2 組合せの応用
- ポイント3 組分け
- ポイント4 同じものを含む順列
- ポイント5 最短経路
- ポイント6 重複組合せ

④ 確率 30

- ポイント1 事象と確率
- ポイント2 順列・組合せと確率
- ポイント3 いろいろな事象
- ポイント4 確率の基本性質
- ポイント5 余事象とその確率

⑤ 独立な試行と確率 38

- ポイント1 独立な試行と確率
- ポイント2 独立な試行と確率の応用
- ポイント3 反復試行の確率
- ポイント4 反復試行の確率の応用
- ポイント5 条件付き確率
- ポイント6 確率の乗法定理
- ポイント7 いろいろな確率

⑥ 期待値 50

- ポイント1 期待値
- ポイント2 期待値の応用

⑦ 場合の数と確率のまとめ 54

第2章 図形の性質

⑧ 三角形 64

- ポイント1 線分の比
- ポイント2 三角形の内角・外角の二等分線と比
- ポイント3 三角形の辺と角の大小関係
- ポイント4 三角形の重心
- ポイント5 三角形の外心
- ポイント6 三角形の内心
- ポイント7 三角形の垂心・傍心
- ポイント8 チェバの定理とその逆
- ポイント9 メネラウスの定理とその逆

⑨ 円 78

- ポイント1 円周角の定理
- ポイント2 円に内接する四角形
- ポイント3 四角形が円に内接するための条件
- ポイント4 円と接線
- ポイント5 接線と弦に関する定理
- ポイント6 方べきの定理①
- ポイント7 方べきの定理②
- ポイント8 2つの円の位置関係
- ポイント9 2つの円の共通接線

⑩ 作図 92

- ポイント1 軌跡
- ポイント2 基本の作図
- ポイント3 いろいろな作図
- ポイント4 長さの作図
- ポイント5 正五角形の作図と黄金比

⑪ 空間図形 100

- ポイント1 平面の決定条件, 2直線の位置関係
- ポイント2 直線と平面の位置関係
- ポイント3 2平面の位置関係
- ポイント4 多面体①
- ポイント5 多面体②

⑫ 図形の性質のまとめ 108



第3章 数学と人間の活動

13 約数と倍数 112

- ポイント1 約数と倍数
- ポイント2 倍数の判定法
- ポイント3 素因数分解
- ポイント4 約数の個数
- ポイント5 約数の利用
- ポイント6 最大公約数・最小公倍数
- ポイント7 互いに素な自然数の性質
- ポイント8 最大公約数と最小公倍数の性質

14 整数の分類 128

- ポイント1 整数の割り算における商と余り
- ポイント2 余りによる整数の分類
- ポイント3 整数の性質の証明
- ポイント4 合同式

15 ユークリッドの互除法 132

- ポイント1 ユークリッドの互除法
- ポイント2 不定方程式の整数解
- ポイント3 不定方程式の一般解
- ポイント4 不定方程式の利用

16 整数の性質の活用 140

- ポイント1 分数と有限小数, 循環小数
- ポイント2 部屋割り論法
- ポイント3 n 進法
- ポイント4 n 進法の計算
- ポイント5 n 進法の小数

17 整数の性質のまとめ 148

18 空間の位置の表し方, 測量 154

- ポイント1 空間の位置の表し方
- ポイント2 測量

19 数学とゲーム 158

- ポイント1 図形の敷き詰め
- ポイント2 石取りゲーム

● 公式集 162

Point ① 集合とその表し方

*集合について詳しくは、数学Iの「数と式」で学習する

- **集合**……範囲がはっきりしたものの集まりを**集合**といい、集合を構成している1つ1つのものを集合の**要素**という。 a が集合 A の要素であることを $a \in A$ 、 a が集合 A の要素でないことを $a \notin A$ と表す。
また、集合を表すには、次の2つの方法がある。

- ① 要素を書き並べる方法
- ② 要素の満たす条件を示す方法

例 1から8までの自然数の集まりを、集合 A とする。

5は集合 A の要素だから、 $5 \in A$

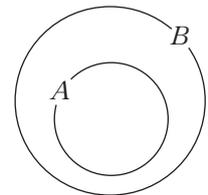
10は集合 A の要素でないから、 $10 \notin A$

また、集合 A を

- ① 要素を書き並べる方法で表すと、 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- ② 要素の満たす条件を示す方法で表すと、 $A = \{x \mid x \text{は自然数}, 1 \leq x \leq 8\}$

- **部分集合**……集合 A のすべての要素が集合 B に属しているとき、 A を B の**部分集合**といい、 $A \subset B$ または $B \supset A$ で表す。

例 $A = \{2, 4, 5\}$ 、 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ のとき、 $A \subset B$

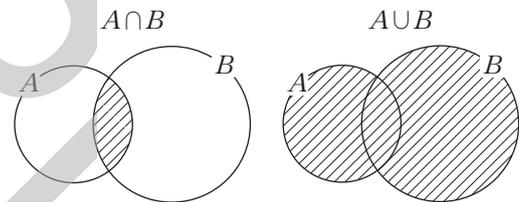


- **空集合**……要素が1つもない集合を**空集合**といい、記号 ϕ で表す。
どのような集合 A についても、空集合 ϕ はその部分集合と考える。

● **共通部分と和集合**

集合 A 、 B のどちらにも属する要素全体の集合を、 A と B の**共通部分**といい、 $A \cap B$ で表す。

集合 A 、 B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を、 A と B の**和集合**といい、 $A \cup B$ で表す。

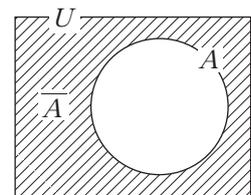


例 $A = \{2, 4, 6, 8\}$ 、 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ について、
 $A \cap B = \{2, 4\}$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

- **全体集合**……集合を考えるとき、1つの集合 U を最初に決めて、その部分集合を考えることが多い。
このとき、 U を**全体集合**という。

- **補集合**……全体集合 U の部分集合 A に対して、 A に属さない U の要素全体の集合を、 U に関する A の**補集合**といい、 \overline{A} で表す。

例 $U = \{x \mid x \text{は} 10 \text{以下の自然数}\}$ を全体集合とすると、
 $A = \{1, 3, 5, 6, 9\}$ について、
 $\overline{A} = \{2, 4, 7, 8, 10\}$



- **補集合の性質**…… $A \cap \overline{A} = \phi$ 、 $A \cup \overline{A} = U$ 、 $\overline{\overline{A}} = A$

● **ド・モルガンの法則**

- ① $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- ② $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Point 1 集合の要素の個数

●有限集合・無限集合……要素の個数が有限である集合を**有限集合**といい、無限に多くの要素からなる集合を**無限集合**という。

●集合の要素の個数……集合 A が有限集合のとき、その要素の個数を $n(A)$ で表す。

例 $A = \{x \mid x \text{ は } 16 \text{ の正の約数}\}$ のとき、 $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ より、 $n(A) = 5$

●和集合・補集合の要素の個数

① $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

とくに、 $A \cap B = \phi$ のとき、 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

② $n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$ ただし、 U は全体集合

例 全体集合 U の部分集合 A, B について、

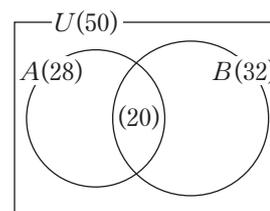
$n(U) = 50, n(A) = 28, n(B) = 32, n(A \cap B) = 20$ であるとき、

$$n(A \cup B) = 28 + 32 - 20$$

$$= 40$$

$$n(\bar{A}) = 50 - 28$$

$$= 22$$



確認問題 1 Point 1 の例の全体集合 U と、その部分集合 A, B について、次のものを求めよ。

(1) $n(\bar{B})$

(2) $n(\overline{A \cup B})$

(3) $n(\bar{A} \cap \bar{B})$

Point 2 倍数の個数

例題 100 以下の自然数のうち、次のような数の個数を求めよ。

(1) 5 の倍数でないもの

(2) 5 の倍数または 7 の倍数であるもの

解答 100 以下の自然数全体の集合を U とし、 U の部分集合で 5 の倍数全体の集合を A 、7 の倍数全体の集合を B とする。

$A = \{5 \cdot 1, 5 \cdot 2, 5 \cdot 3, \dots, 5 \cdot 20\}$ より、 $n(A) = 20$

$B = \{7 \cdot 1, 7 \cdot 2, 7 \cdot 3, \dots, 7 \cdot 14\}$ より、 $n(B) = 14$

(1) $n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$

$$= 100 - 20 = 80$$

答 80 個

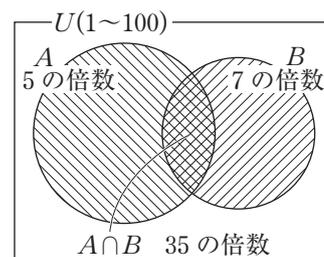
(2) $A \cap B$ は、35 の倍数全体の集合であるから、

$A \cap B = \{35 \cdot 1, 35 \cdot 2\}$ より、 $n(A \cap B) = 2$

よって、 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$= 20 + 14 - 2 = 32$$

答 32 個



確認問題 2 100 以下の自然数のうち、次のような数の個数を求めよ。

(1) 4 の倍数でないもの

(2) 4 の倍数または 6 の倍数であるもの

(3) 6 の倍数であるが 4 の倍数でないもの

(4) 4 の倍数でも 6 の倍数でもないもの

Point ③ 集合の応用

例題 ある高校の1年生200人のうち、運動部に入っている生徒は128人、文化部に入っている生徒は145人であり、運動部にも文化部にも入っていない生徒は24人であった。

- (1) 運動部と文化部の両方に入っている生徒の人数を求めよ。
 (2) 運動部に入っているが、文化部に入っていない生徒の人数を求めよ。

解答 1年生200人の集合を全体集合 U 、運動部に入っている生徒の集合を A 、文化部に入っている生徒の集合を B とすると、

$$n(U) = 200, n(A) = 128, n(B) = 145, n(\overline{A \cap B}) = 24$$

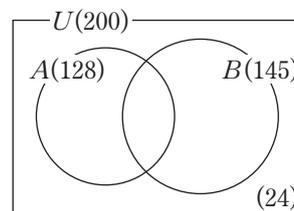
$$\begin{aligned} (1) \quad n(A \cup B) &= n(U) - n(\overline{A \cup B}) \\ &= n(U) - n(\overline{A \cap B}) \\ &= 200 - 24 = 176 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 128 + 145 - 176 = 97 \text{ (人)} \end{aligned}$$

答 97人

$$\begin{aligned} (2) \quad n(A \cap \overline{B}) &= n(A) - n(A \cap B) \\ &= 128 - 97 = 31 \text{ (人)} \end{aligned}$$

答 31人



別解 右のような人数の表を作って求めると、

①は、 $n(\overline{A}) = 200 - 128 = 72$

②は、 $n(\overline{A \cap B}) = 72 - 24 = 48$ となるので、

(1) $n(A \cap B) = 145 - 48 = 97$

(2) $n(A \cap \overline{B}) = 128 - 97 = 31$

| | B | \overline{B} | 合計 |
|----------------|-----|----------------|-----|
| A | (1) | (2) | 128 |
| \overline{A} | ② | 24 | ① |
| 合計 | 145 | | 200 |

確認問題 ③ 次の問いに答えよ。

□(1) 数学と英語の試験を行った。数学と英語ともに合格した者が21人、どちらか1教科だけ合格した者が43人いる。数学に合格した者が30人であるとき、英語に合格した者は何人か。

□(2) 50人の生徒に、A、B 2種類の本を読んだかどうか尋ねたところ、Aを読んだ生徒が27人、Bを読んだ生徒が32人、AもBも読んだ生徒が15人いた。このとき、次のような生徒の人数を求めよ。

□① AもBも読んでいない生徒

□② Aだけ読んだ生徒

□(3) 400人の人に2つの提案 a 、 b をしたところ、 a に賛成の人は254人、 b に賛成の人は288人、 a にも b にも賛成でない人は75人であった。 a に賛成の人の集合を A 、 b に賛成の人の集合を B とするとき、右の表の空らんをうめ、次の人数を求めよ。

□① a にも b にも賛成の人

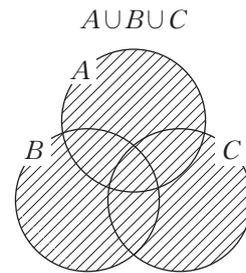
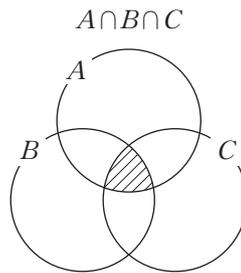
□② b にだけ賛成の人

| | B | \overline{B} | 合計 |
|----------------|-----|----------------|-----|
| A | | | 254 |
| \overline{A} | | 75 | |
| 合計 | 288 | | 400 |

Point 4 3つの集合の要素の個数

● 3つの集合の共通部分

集合 A, B, C のどれにも属する要素全体の集合を A, B, C の共通部分といい、 $A \cap B \cap C$ で表す。



● 3つの集合の和集合

集合 A, B, C の少なくとも1つに属する要素全体の集合を A, B, C の和集合といい、 $A \cup B \cup C$ で表す。

例 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 4, 6, 8\}, C = \{3, 4, 5, 6\}$ について、

$$A \cap B \cap C = \{4\}$$

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

● 3つの集合の要素の個数

A, B, C を有限集合とするとき、

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

例 100 以下の自然数のうちで、2 または 3 または 5 で割り切れる数の個数

100 以下の自然数全体の集合を全体集合 U 、 U の部分集合で、2 の倍数全体、3 の倍数全体、5 の倍数全体の集合をそれぞれ A, B, C とすると、

$$A = \{2 \cdot 1, 2 \cdot 2, \dots, 2 \cdot 50\}$$

$$B = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, \dots, 3 \cdot 33\}$$

$$C = \{5 \cdot 1, 5 \cdot 2, \dots, 5 \cdot 20\}$$

$$A \cap B = \{6 \cdot 1, 6 \cdot 2, \dots, 6 \cdot 16\}$$

$$B \cap C = \{15 \cdot 1, 15 \cdot 2, \dots, 15 \cdot 6\}$$

$$C \cap A = \{10 \cdot 1, 10 \cdot 2, \dots, 10 \cdot 10\}$$

また、 $A \cap B \cap C = \{30 \cdot 1, 30 \cdot 2, 30 \cdot 3\}$

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\ &= 50 + 33 + 20 - 16 - 6 - 10 + 3 = 74 \text{ (個)} \end{aligned}$$

確認問題 4 次の問いに答えよ。

□(1) 全体集合を $U = \{x \mid x \text{ は } 10 \text{ 以下の自然数}\}$ とする。 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{3, 4, 5, 6\},$

$C = \{2, 3, 5, 7\}$ について、次の集合を求めよ。

□① $A \cap B \cap C$

□② $A \cup B \cup C$

□③ $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

□(2) 1000 以下の自然数で、次のような数の個数を求めよ。

□① 4 または 6 または 10 で割り切れるもの

□② 4, 6, 10 のいずれでも割り切れないもの

練成問題 A

1 集合 U の部分集合 A, B について, $n(U) = 40$, $n(A) = 25$, $n(B) = 18$, $n(A \cup B) = 30$ であるとき, 次の値を求めよ。 → Point 1

(1) $n(A \cap B)$

(2) $n(\overline{A})$

(3) $n(\overline{A \cup B})$

(4) $n(\overline{A} \cup B)$

2 1 から 100 までの自然数のうち, 次のような数の個数を求めよ。 → Point 2

(1) 5 の倍数でないもの

(2) 5 の倍数または 6 の倍数であるもの

(3) 5 の倍数であるが 6 の倍数でないもの

(4) 5 の倍数でも 6 の倍数でもないもの

3 50 以上 100 以下の自然数のうち, 次のような数の個数を求めよ。 → Point 2

(1) 6 で割り切れるもの

(2) 6 または 8 で割り切れるもの

(3) 6 でも 8 でも割り切れないもの

(4) 8 で割り切れるが 6 で割り切れないもの

4 A, B 2 つの試験を 40 人の生徒に行ったところ, A に合格した生徒は 31 人, B に合格した生徒は 27 人であった。また, A, B とも不合格であった生徒は 3 人であった。このとき, 次の問いに答えよ。 → Point 3

(1) A, B とも合格した生徒は何人か。

(2) B だけに合格した生徒は何人か。

5 あるクラスの生徒 35 人のうち, めがねを使用している人は 12 人で, そのうち 5 人はめがねとコンタクトレンズの両方を使用している。また, めがねとコンタクトレンズのどちらも使用していない人は 13 人である。このとき, 次の問いに答えよ。 → Point 3

(1) めがねとコンタクトレンズのうち少なくとも一方を使用している生徒は何人か。

(2) コンタクトレンズを使用している生徒は何人か。

練成問題 B

1 次の問いに答えよ。

- (1) 集合 A, B について、 $n(A) + n(B) = 10$, $n(A \cup B) = 7$ であるとき、 $n(\overline{A} \cap B) + n(A \cap \overline{B})$ の値を求めよ。
- (2) 3桁の自然数のうち、3と8のどちらか一方だけで割り切れるものの個数を求めよ。

2 ある町でスポーツ観戦に関するアンケート調査を行い、200人から回答を得た。その結果、野球に関心があると答えた人は93人であった。また、野球とサッカーの2つの競技のうち、一方だけに関心があると答えた人は73人、どちらにも関心がないと答えた人は75人であった。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 野球とサッカーの両方に関心があると答えた人は何人か。
- (2) サッカーに関心があると答えた人は何人か。

3 次の問いに答えよ。

- (1) ある高校の1年生150人のうち、通学にバスを利用している生徒は52人、電車を利用している生徒は61人いる。通学にバスも電車も利用していない生徒は少なくとも何人いるか。
- (2) 38人の生徒がA, B2問の問題を解いた。問題Aができた生徒は29人、問題Bができた生徒は21人であったという。
- ① 問題A, Bの両方ができた生徒は少なくとも何人いるか。
- ② 問題A, Bが両方ともできなかった生徒は、最大で何人であるか。

4 何人かの生徒に英語と数学の試験をしたところ、英語の不合格者は17名で、英語と数学がともに不合格であった者は全体のちょうど $\frac{1}{8}$ で、英語と数学がともに合格した者は全体のちょうど $\frac{5}{6}$ であった。このとき、全体の人数および数学の合格者の人数を求めよ。

5 ある学校で英語、国語、数学の試験を100人の生徒が受けた。その結果、英語、国語、数学の合格者はそれぞれ81人、77人、72人であった。また、英語と国語に合格したのは65人、国語と数学に合格したのは58人、英語と数学に合格したのは63人で、さらに3教科すべて合格したのは52人であった。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 数学だけが不合格であったのは何人か。 (2) 数学だけ合格したのは何人か。
- (3) 3教科とも不合格であったのは何人か。

6 200以下の自然数で、次のような数の個数を求めよ。

- (1) 3, 5, 7のどれかで割り切れるもの (2) 105との公約数が1だけであるもの