目次

第 1 章　数列

CONTENTS

第２章　確率分布と統計的な推測

1 等差数列・等比数列

学習日　　月　　日

Point 1 数列の定義

数列……次のⒶ，Ⓑのように，数を 1 列に並べたものを**数列**といい，数列の各数を**項**という。

1，3，5，7，9，11，13，……　⇦Ⓐ（正の奇数を小さい順に並べた数列）

1，4，9，16，25，36，49　　⇦Ⓑ（自然数の 2 乗を小さい順に 7 個並べた数列）

項は最初から順に**初項(第 1 項)**，**第 2 項**，**第 3 項**，…… といい，n 番目の項を**第 n 項**という。また，数列Ⓐのように，項の個数が無限である数列を**無限数列**といい，数列Ⓑのように，項の個数が有限である数列を**有限数列**という。有限数列では，項の個数を**項数**，最後の項を**末項**という。

例　① 数列Ⓐの初項は 1，第 2 項は 3，第 5 項は 9 である。

② 数列Ⓑの項数は 7，末項は 49 である。

数列の表し方……数列を一般的に表すには，1 つの文字に項の番号を添えて a_1，a_2，a_3，……，a_n，…… のように書く。また，この数列を，$\{a_n\}$ と略記することがある。数列の第 n 項 a_n が n の式で表されるとき，この a_n を数列 $\{a_n\}$ の**一般項**という。

例　① 数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n=2n-1$ で表されるとき（⇨ 数列Ⓐ）

a_n の式に $n=1$，2，3，…… を代入すると，次のように数列の各項が求められる。

$a_1=2\cdot1-1=1$，　$a_2=2\cdot2-1=3$，　$a_3=2\cdot3-1=5$，　……

$a_8=2\cdot8-1=15$，　……

② 数列 3，-6，9，-12，15，…… の一般項 a_n の推定

符号を除いた数列 3，6，9，12，15，…… の第 n 項は $3n$ で表される。

符号は，奇数番目の項が $+$，偶数番目の項が $-$ であるから，第 n 項の符号は $(-1)^{n+1}$ で表される。

よって，一般項は，$a_n=(-1)^{n+1}\cdot3n$

確認問題 1　次の問いに答えよ。

□(1) 一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の，初項から第 5 項までを求めよ。

□① $a_n=-2n+5$　　　□② $a_n=3^n$

□③ $a_n=\dfrac{n}{3n-1}$　　　□④ $a_n=(-1)^n$

□⑤ $a_n=(-1)^{n+1}\cdot n^2$　　　□⑥ $a_n=5$

□(2) 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

□① 0，3，6，9，12，……　　　□② 1，-2，3，-4，5，……

□③ 1，8，27，64，125，……　　　□④ $1\cdot3$，$2\cdot4$，$3\cdot5$，$4\cdot6$，$5\cdot7$，……

□⑤ 2，$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{6}{5}$，$\dfrac{8}{7}$，$\dfrac{10}{9}$，……　　　□⑥ $-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{9}$，$-\dfrac{1}{27}$，$\dfrac{1}{81}$，……

Point 2　等差数列

● 等差数列……数列 a_1，a_2，a_3，……，a_n，…… において，各項に一定の数 d を加えると，次の項が得られるとき，この数列を**等差数列**といい，d をその**公差**という。このとき，どんな自然数 n に対しても，$\boldsymbol{a_{n+1}=a_n+d}$，すなわち $\boldsymbol{a_{n+1}-a_n=d}$ という関係が成り立つ。

例　初項 4 に，次々に 3 を加えて得られる数列 $\{a_n\}$：4，7，10，13，16，…… について，隣り合う 2 つの項の差 $a_{n+1}-a_n$ は，$a_2-a_1=7-4=3$，$a_3-a_2=10-7=3$，$a_4-a_3=13-10=3$，…… となり，常に一定の数 3 になる。
このとき，数列 $\{a_n\}$ は初項 4，公差 3 の等差数列という。

● 等差数列の一般項

数列 $\{a_n\}$ が初項 a，公差 d の等差数列であるとき，

$a_1=a$，　$a_2=a+d$，　$a_3=a+2d$，　$a_4=a+3d$，　……

となるので，一般項 a_n は次の式で表される。

$$\boldsymbol{a_n=a+(n-1)d}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \| \end{array}$$
$$\underbrace{a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} \cdots\cdots \xrightarrow{+d} a_{n-1} \xrightarrow{+d} a_n}_{(n-1)\text{個}}$$

例　初項 3，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=3+(n-1)\cdot 4=4n-1$
例えば，第 10 項は，$a_{10}=4\cdot 10-1=39$
また，147 は，$147=4n-1$ を解くと，$n=37$ となるから，第 37 項

例題　**第 3 項が -7，第 10 項が 35 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。**

解き方　初項を a，公差を d として，a，d についての連立方程式を作り，これを解く。

解答　初項を a，公差を d とすると，
$a_3=-7$ より，$a+2d=-7$
$a_{10}=35$ より，$a+9d=35$
これを解いて，$a=-19$，$d=6$
よって，$a_n=-19+(n-1)\cdot 6=6n-25$　　**答**　$a_n=6n-25$

確認問題 2　**次の問いに答えよ。**

□(1)　次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，その第 18 項を求めよ。

□①　初項が 2，公差が 5　　□②　初項が 6，公差が $-\dfrac{1}{2}$

□③　-7，-3，1，5，……　　□④　21，13，5，-3，……

□(2)　次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

□①　初項が -13，第 9 項が 3　　□②　初項が 100，第 7 項が 46

□③　公差が 3，第 10 項が 55　　□④　公差が $-\dfrac{1}{4}$，第 8 項が 0

□(3)　第 4 項が 12，第 9 項が 47 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，117 は第何項か求めよ。

□(4)　第 15 項が 37，第 35 項が -23 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，この数列が初めて負の数になるのは第何項か。

Point 3 等差中項

等差中項……数列 a，b，c がこの順に等差数列をなすとき，中央の項 b を**等差中項**という。

等差数列をなす 3 つの数については，次の1または2のように扱う。

1　数列 a，b，c が等差数列ならば，公差を d とすると，$a=b-d$，$c=b+d$ であるから，3 つの数は，次のように等差中項 b を中心に左右対称の形に表される。

$$b-d,\ b,\ b+d$$

2　数列 a，b，c が等差数列ならば，$b-a=c-b$ から，$2b=a+c$ となる。
逆に，$2b=a+c$ ならば，$b-a=c-b$ となり，数列 a，b，c は等差数列になる。
よって，次のことが成り立つ。

数列 a，b，c が等差数列 $\iff 2b=a+c$

例 数列 5，b，11 が等差数列であるとき，$2b=5+11$ より，$b=8$ となる。

例題 **等差数列をなす 3 つの数があって，その和は 21，積は 315 である。この 3 つの数を求めよ。**

解き方 上の1より 3 つの数を $b-d$，b，$b+d$ で表す方法と，上の2より $2b=a+c$ の関係を使う方法の 2 通りの解法がある。

解答 1 公差を d とし，等差数列をなす 3 つの数を $b-d$，b，$b+d$ とすると，条件より，

$$\begin{cases}(b-d)+b+(b+d)=21 & \cdots① \\ (b-d)b(b+d)=315 & \cdots②\end{cases}$$

①より，$3b=21$

$b=7$

②に代入して，$7(7^2-d^2)=315$

$49-d^2=45$

$d^2=4$

$d=\pm 2$

よって，求める 3 つの数は，

$7-2$，7，$7+2$ または $7+2$，7，$7-2$

すなわち，5，7，9

答 5，7，9

解答 2 等差数列をなす 3 つの数を a，b，c とすると，

条件より，$\begin{cases}2b=a+c & \cdots① \\ a+b+c=21 & \cdots② \\ abc=315 & \cdots③\end{cases}$

①，②より，$b+2b=21$

$b=7$

①より，$a+c=14$　$\cdots④$

③より，$ac=45$　$\cdots⑤$

④，⑤より，$a(14-a)=45$

$a^2-14a+45=0$

$(a-5)(a-9)=0$

$a=5,\ 9$

④より，$a=5$ のとき，$c=9$

$a=9$ のとき，$c=5$

よって，求める 3 つの数は，

5，7，9

答 5，7，9

確認問題 3 **次の問いに答えよ。**

□(1)　次の数列が等差数列となるように，それぞれ a，b，c の値を定めよ。

□①　a，2，-3　　□②　7，b，-19　　□③　-2，$\dfrac{5}{2}$，c

□(2)　数列 4，a，7，b が等差数列であるとき，a，b の値を求めよ。

□(3)　等差数列をなす 3 つの数があって，その和は -6 で，積は 90 である。この 3 つの数を求めよ。

□(4)　等差数列をなす 3 つの数があって，その和は 12，積は -80 である。この 3 つの数を求めよ。

Point 4 等差数列であることの証明

等差数列の性質

1 数列 $\{a_n\}$ が等差数列であるとする。

初項を a，公差を d とすると，第 n 項は，$a_n=a+(n-1)d$

すなわち，$a_n=dn+(a-d)$ であるから，$d\neq 0$ のとき，第 n 項 a_n は n の1次式で表される。

2 逆に，第 n 項 a_n は n の1次式で表されるとする。

$a_n=pn+q$（p，q は定数）とすると，

$$a_{n+1}-a_n=\{p(n+1)+q\}-(pn+q)=p\ (一定)$$

また，　$a_1=p\cdot 1+q=p+q$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項が $p+q$，公差が p の等差数列である。

1，2をまとめると，

$$a_n=pn+q \iff 数列\ \{a_n\}\ は初項\ p+q，公差\ p\ の等差数列$$

例題 **第 n 項が $3n-5$ である数列は等差数列であることを証明し，その初項と公差を求めよ。**

解き方 数列 $\{a_n\}$ が等差数列であることを証明するには，$a_{n+1}-a_n=$ 一定(これが公差)になることを示す方法と，等差数列の一般項 $a_n=a+(n-1)d$ と比較する方法の2通りある。

解答1 〔証明〕 $a_n=3n-5$ とすると，$a_{n+1}-a_n=\{3(n+1)-5\}-(3n-5)=3$

よって，差 $a_{n+1}-a_n$ が一定であるから，数列 $\{a_n\}$ は等差数列である。終

また，初項は $a_1=3\cdot 1-5=-2$，公差は3である。　答 初項は -2，公差は3

解答2 〔証明〕 第 n 項は，$3n-5=-2+(n-1)\cdot 3$ であるから，

この数列は初項 -2，公差3の等差数列である。終　答 初項は -2，公差は3

例題 **$a_n=4n-3$ である数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の項を，初項から1つおきにとってできる数列 $\{b_n\}$：a_1，a_3，a_5，…… は等差数列であることを示し，その初項と公差を求めよ。**

解き方 数列 $\{b_n\}$ の第 n 項 b_n を n の式で表し，$b_{n+1}-b_n$ が一定であることを示す。

解答 〔証明〕 $b_n=a_{2n-1}=4(2n-1)-3=8n-7$

$b_{n+1}-b_n=\{8(n+1)-7\}-(8n-7)=8$

よって，差 $b_{n+1}-b_n$ が一定であるから，数列 $\{b_n\}$ は等差数列である。終

また，初項は $b_1=8\cdot 1-7=1$，公差は8である。　答 初項は1，公差は8

確認問題4 **次の問いに答えよ。**

□(1) 第 n 項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示し，その初項と公差を求めよ。

□① $a_n=5n+4$　　□② $a_n=-7n+3$

□(2) 第 n 項が $a_n=3n-2$ で表される数列 $\{a_n\}$ に対し，次の b_n，c_n を第 n 項とする数列は，いずれも等差数列であることを示し，その初項と公差を求めよ。

□① $b_n=a_{2n-1}$　　□② $c_n=a_{2n}$

□(3) 初項3，公差4の等差数列 $\{a_n\}$，初項 -3，公差6の等差数列 $\{b_n\}$ に対し，一般項が $c_n=2a_n+3b_n$ である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを示し，その初項と公差を求めよ。

Point 5 等差数列の和

等差数列の和

初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の末項を l とし，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$$
\begin{array}{rl}
S_n = & a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-d)+l \\
+)\ S_n = & l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+d)+a \\
\hline
2S_n = & (a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l) \\
2S_n = & n(a+l)
\end{array}
$$

項の順序を逆にしたものを辺々加える

右辺は $(a+l)$ の n 個の和

よって，$S_n=\dfrac{1}{2}n(a+l)$

また，$l=a+(n-1)d$ であるから，$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

したがって，初項 a，公差 d，末項 l，項数 n の等差数列の和 S_n は，

$$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

例 ① 初項 7，末項 31，項数 13 の等差数列の和は，

$$\frac{1}{2}\cdot 13(7+31)=247$$

② 等差数列 70，65，60，55，…… の初項から第 20 項までの和は，初項が 70，公差が -5 であるから，

$$\frac{1}{2}\cdot 20\{2\cdot 70+(20-1)\cdot(-5)\}=450$$

例題 **初項 42，公差 -3 の等差数列において，初項から第何項までの和が 231 になるか。**

解き方 初項から第 n 項までの和を n の式で表し，n についての方程式を導き，それを解く。

解答 第 n 項までの和が 231 になるとすると，

$$\frac{1}{2}n\{2\cdot 42+(n-1)\cdot(-3)\}=231$$

$$n^2-29n+154=0$$

$$(n-7)(n-22)=0$$

$$n=7,\ 22$$

よって，第 7 項または第 22 項までの和が 231 になる。

答 第 7 項または第 22 項

確認問題 5 **次の問いに答えよ。**

□(1) 次の等差数列の和を求めよ。

□① 初項 5，末項 59，項数 10

□② 初項 -9，公差 4，項数 15

□③ 初項 30，公差 2，末項 62

□④ 公差 -3，末項 2，項数 20

□(2) 次の等差数列の和を求めよ。

□① 1，6，11，……，176

□② 130，123，116，……，-73

□(3) 初項 7，公差 2 の等差数列において，初項から第何項までの和が 112 になるか。

□(4) 初項 90，公差 -6 の等差数列において，初項から第何項までの和が 450 になるか。

□(5) 初項 40，公差 -3 の等差数列において，初項から第何項までの和が初めて負になるか。

Point 6 自然数の列の和

自然数の和……1 から始まる n 個の自然数は初項 1，末項 n，項数 n の等差数列であるから，その和は，

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

奇数の和……1 から始まる n 個の奇数は初項 1，末項 $2n-1$，項数 n の等差数列であるから，その和は，

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2 \quad \longleftarrow \frac{1}{2}n\{1+(2n-1)\}=n^2$$

倍数の和……一般に，整数 p の倍数の和は，公差 p の等差数列の和として求める。

例 ① 1 から 100 までの自然数のうち，3 で割り切れる数を順に並べると，

$$3\cdot1,\quad 3\cdot2,\quad 3\cdot3,\quad \cdots\cdots,\quad 3\cdot33$$

となる。これは，初項 3，末項 99，項数 33 の等差数列である。

よって，その和は，$\frac{1}{2}\cdot33(3+99)=1683$

② 10 から 100 までの自然数のうち，5 で割ると 3 余る数を順に並べると，

$$5\cdot2+3,\quad 5\cdot3+3,\quad 5\cdot4+3,\quad \cdots\cdots,\quad 5\cdot19+3$$

となる。これは，初項 13，末項 98，項数 $19-2+1=18$ の等差数列である。

よって，その和は，$\frac{1}{2}\cdot18(13+98)=999$

例題 **1 から 100 までの正の整数のうち，2 の倍数または 7 の倍数の和を求めよ。**

解き方 2 の倍数または 7 の倍数の和は，(2 の倍数の和)＋(7 の倍数の和)－(2 と 7 の公倍数の和)と考える。

解答 2 の倍数は $2\cdot1$，$2\cdot2$，$2\cdot3$，……，$2\cdot50$ となるから，この和は，

$$\frac{1}{2}\cdot50(2+100)=2550$$

7 の倍数は $7\cdot1$，$7\cdot2$，$7\cdot3$，……，$7\cdot14$ となるから，この和は，

$$\frac{1}{2}\cdot14(7+98)=735$$

2 と 7 の公倍数は $14\cdot1$，$14\cdot2$，$14\cdot3$，……，$14\cdot7$ となるから，この和は，

$$\frac{1}{2}\cdot7(14+98)=392$$

よって，求める和は，$2550+735-392=2893$

答 2893

確認問題 6 **次の問いに答えよ。**

□(1) 上の自然数の和の公式を用いて，51 から 150 までの自然数の和を求めよ。

□(2) 偶数の列 2，4，6，……，$2n$ の和を求めよ。

□(3) 1 から 100 までの自然数のうち，次のような数の和を求めよ。

□① 6 の倍数　　□② 6 で割ると 2 余る数　　□③ 6 で割り切れない数

□(4) 2 桁の正の整数のうち，次のような数の和を求めよ。

□① 4 の倍数　　□② 4 で割ると 3 余る数　　□③ 4 で割り切れない数

□(5) 1 から 200 までの自然数のうち，3 または 5 で割り切れる数の和を求めよ。

Point 7 等差数列の和の利用

和から一般項を求める

初項 a，公差 d，項数 n，末項 l，和 S_n のうちのいくつかがわかれば，$l=a+(n-1)d$，$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)$ を使って等式ができ，残りの要素が求められる。

例題 **初項から第 5 項までの和が 55，初項から第 10 項までの和が 185 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。**

解き方 和の条件から，初項 a，公差 d についての連立方程式を作り，それを解く。

解答 初項を a，公差を d，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$S_5=55$ より，$\frac{1}{2}\cdot 5\{2a+(5-1)d\}=55$

$S_{10}=185$ より，$\frac{1}{2}\cdot 10\{2a+(10-1)d\}=185$

すなわち，$\begin{cases} a+2d=11 \\ 2a+9d=37 \end{cases}$

これを解いて，$a=5$，$d=3$

よって，一般項は，$a_n=5+(n-1)\cdot 3=3n+2$　　**答** $a_n=3n+2$

例題 **初項が 70，第 8 項から第 17 項までの和が 10 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。**

解き方 初項から第 n 項までの和を S_n として，第 8 項から第 17 項までの和が 10 ⇨ $S_{17}-S_7=10$ が成り立つことを利用する。

解答 公差を d，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_{17}-S_7=10$ より，

$$\frac{1}{2}\cdot 17\{2\cdot 70+(17-1)d\}-\frac{1}{2}\cdot 7\{2\cdot 70+(7-1)d\}=10$$

$$700+115d=10$$

$$d=-6$$

よって，一般項は，$a_n=70+(n-1)\cdot(-6)=-6n+76$　　**答** $a_n=-6n+76$

＊第 8 項から第 17 項までの和が 10 ⇨ 初項 a_8，末項 a_{17}，項数 10 の等差数列の和が 10 であることを利用して，$\frac{1}{2}\cdot 10(a_8+a_{17})=10$ から公差 d の値を求める方法もある。

確認問題 7 次の問いに答えよ。

□(1) 次のような等差数列において，〔　〕内のものを求めよ。

□① 初項が 4，初項から第 13 項までの和が 13 〔公差〕

□② 初項が 1，末項が 37，和が 190 〔項数と公差〕

□(2) 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

□① 初項から第 9 項までの和が -18，初項から第 16 項までの和が 80

□② 初項が 100，第 9 項から第 18 項までの和が 0

□③ 第 10 項が 2，第 10 項から第 25 項までの和が 392

□④ 初項から第 6 項までの和が 42，第 7 項から第 12 項までの和が 66

Point 8 等差数列の和の最大・最小

● 等差数列の和の最大値・最小値

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，S_n の値を最大または最小にする n の値について次のことがいえる。

1 $a>0$，$d<0$ であり，第 k 項 a_k から負の数になるとすれば，S_n の最大値は S_{k-1} になる。

2 $a<0$，$d>0$ であり，第 k 項 a_k から正の数になるとすれば，S_n の最小値は S_{k-1} になる。

例 ① 等差数列 10，7，4，1，-2，-5，…… では，第 5 項から負の数になるから，正の数の項だけの和，すなわち初項から第 4 項までの和が最大になる。

② 等差数列 -23，-19，-15，-11，-7，-3，1，5，…… では，第 7 項から正の数になるから，負の数の項だけの和，すなわち初項から第 6 項までの和が最小になる。

例題 **初項が 80，公差が -6 の等差数列 $\{a_n\}$ がある。初項から第 n 項までの和 S_n の最大値を求めよ。**

解き方 上の1のように考える方法と，n の 2 次式となる S_n を $a(n-p)^2+q$ に直す方法の 2 通りの解法がある。

解答1

$$a_n=80+(n-1)\cdot(-6)$$
$$=-6n+86$$

$a_n>0$ とすると，

$$-6n+86>0$$
$$n<14.3\cdots$$

この不等式を満たす最大の自然数は $n=14$ だから，a_1 から a_{14} までは正の数，a_{15} からは負の数になる。

よって，S_n は，$n=14$ のとき最大となり，最大値は，

$$S_{14}=\frac{1}{2}\cdot14\{2\cdot80+13\cdot(-6)\}$$
$$=574$$

答 574

解答2

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot80+(n-1)\cdot(-6)\}$$
$$=-3n^2+83n$$
$$=-3\left(n^2-\frac{83}{3}n\right)$$
$$=-3\left(n-\frac{83}{6}\right)^2+3\cdot\left(\frac{83}{6}\right)^2$$

よって，S_n は，$n=\frac{83}{6}=13.8\cdots$ に最も近い自然数 $n=14$ のとき，最大となり，最大値は，

$$S_{14}=-3\cdot14^2+83\cdot14$$
$$=574$$

答 574

確認問題 8 次の問いに答えよ。

□(1) 初項が 47，公差が -3 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。初項から第何項までの和が最大になるか。また，その最大値を求めよ。

□(2) 初項が -50，公差が 4 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。初項から第何項までの和が最小になるか。また，その最小値を求めよ。

□(3) 初項が 38，初項から第 16 項までの和が 8 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。初項から第何項までの和が最大になるか。また，その最大値を求めよ。

□(4) 第 8 項が -12，第 15 項が 30 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。初項から第何項までの和が最小になるか。また，その最小値を求めよ。

Point 9　2つの等差数列の共通項

例題　**初項1，公差3の等差数列$\{a_n\}$と，初項5，公差4の等差数列$\{b_n\}$に共通に含まれる項を，順に並べてできる等差数列を$\{c_n\}$とする。このとき，$\{c_n\}$の初項と公差を求めよ。**

解き方　数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の項を，それぞれ実際に書き出してみると，

$\{a_n\}$：1，4，7，10，13，16，19，22，25，28，……

$\{b_n\}$：5，9，13，17，21，25，29，……

よって，$\{c_n\}$は，13，25，…… となり，初項は13であり，公差は12であると予想される。

このように，$\{c_n\}$の初項と公差を求めるとき，$\{a_n\}$と$\{b_n\}$の各項を実際に並べて，初めに現れた等しい値を初項とし，$\{a_n\}$の公差と$\{b_n\}$の公差の最小公倍数を公差としてもよいが，これを数式で論理的に求めると次のようになる。

解答　$a_n=1+(n-1)\cdot3$

$=3n-2$

$b_n=5+(n-1)\cdot4$

$=4n+1$

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の各項のうち，共通な(値の等しい)数をmとし，$a_p=b_q$とすると，

$m=3p-2=4q+1$　(p，qは自然数)　…①

よって，$3(p-1)=4q$

3と4は互いに素(1以外に共通な約数がない)であるから，qは3の倍数になる。

すなわち，$q=3n$（nは自然数)とおける。

これを，①に代入して，$m=4\cdot3n+1=12n+1$

すなわち，$c_n=12n+1$

よって，数列$\{c_n\}$の初項は，$12\cdot1+1=13$

公差は，12　　　**答**　初項は13，公差は12

＊ $3(p-1)=4q$ から c_n の式を求めるとき，上の **解答** では，qは3の倍数としたが，この代わりに，$p-1$は4の倍数としてもよい。

このとき，$p-1=4n$，すなわち$p=4n+1$

これを上の①に代入すると，$m=3\cdot(4n+1)-2=12n+1$となる。

確認問題 9　次の問いに答えよ。

□(1)　次の2つの等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$に共通に含まれる項を順に並べてできる等差数列を$\{c_n\}$とするとき，$\{c_n\}$の初項と公差を求めよ。

□①　$\{a_n\}$：初項3，公差3の等差数列，$\{b_n\}$：初項5，公差4の等差数列

□②　$\{a_n\}$：初項3，公差2の等差数列，$\{b_n\}$：初項1，公差7の等差数列

□(2)　$a_n=3n-2$，$b_n=5n+3$（$n=1$，2，……)で定義される2つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$のどちらにも現れる値のうち，200以下になるものの個数とその総和を求めよ。

□(3)　1000以下の自然数で，4の倍数であり，かつ，7で割ったときの余りが3となるものの個数と総和を求めよ。

Point ⑩ 等比数列

● **等比数列**……数列 a_1, a_2, a_3, ……, a_n, …… において，各項に一定の数 r を掛けると，次の項が得られるとき，この数列を**等比数列**といい，r をその**公比**という。このとき，どんな自然数 n に対しても，$\boldsymbol{a_{n+1}=ra_n}$ $\left(特に，a_1 \neq 0,\ r \neq 0 のとき，\boldsymbol{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r}\right)$ が成り立つ。

例 初項 2 に，次々に 3 を掛けて得られる数列 $\{a_n\}$：2, 6, 18, 54, 162, …… について，隣り合う 2 つの項の比 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ は，$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{6}{2}=3$, $\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{18}{6}=3$, $\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{54}{18}=3$, …… となり，常に一定の数 3 になる。
このとき，数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公比 3 の等比数列という。

● **等比数列の一般項**

数列 $\{a_n\}$ が初項 a，公比 r の等比数列であるとき，

$$a_1=a,\quad a_2=ar,\quad a_3=ar^2,\quad a_4=ar^3,\quad \cdots\cdots$$

となるので，一般項 a_n は次の式で表される。

$$\boldsymbol{a_n=ar^{n-1}}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \| \\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_{n-1},\ a_n \\ \underbrace{\times r\ \ \times r\ \ \times r\ \ \ \ \times r\ \ \times r}_{(n-1)\text{個}} \end{array}$$

(注) $r \neq 0$ のとき，$r^0=1$ と定める。
また，$r^{-n}=\dfrac{1}{r^n}$

例 初項 7，公比 -2 の等比数列の一般項は，

$$a_n=7\cdot(-2)^{n-1}$$

例題 **第 2 項が -6，第 5 項が 48 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。**

解き方 初項を a，公比を r として，a，r についての連立方程式を作り，これを解く。

解答 初項を a，公比を r とすると，$\begin{cases} ar=-6 & \cdots ① \\ ar^4=48 & \cdots ② \end{cases}$

②÷①より，$r^3=-8$

$r^3=(-2)^3$

$r=-2$

①より，$a=3$

よって，一般項は，$a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$

答 $a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$

確認問題 10 次の問いに答えよ。

□(1) 次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，その第 7 項を求めよ。

□① 初項が 3，公比が 3　　□② 初項が 48，公比が $-\dfrac{1}{4}$　　□③ -2, 2, -2, 2, ……

□④ 1, -6, 36, -216, ……　　□⑤ 4, $\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{4}{9}$, $\dfrac{4}{27}$, ……　　□⑥ 4, -6, 9, $-\dfrac{27}{2}$, ……

□(2) 次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

□① 初項が 5，第 4 項が 135　　□② 公比が -5，第 5 項が -25

□(3) 次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

□① 第 3 項が 32，第 4 項が -128　　□② 第 2 項が 48，第 4 項が 12

□③ 第 5 項が -20，第 8 項が 160　　□④ 第 2 項が -324，第 6 項が -64

Point 11　等比中項

等比中項……数列 a，b，c がこの順に等比数列をなすとき，中央の項 b を**等比中項**という。

等比数列をなす3つの数については，次の[1]または[2]のように扱う。

[1]　数列 a，b，c が等比数列ならば，3つの数は $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{ar}$，$\boldsymbol{ar^2}$（r は公比）で表される。

[2]　数列 a，b，c が等比数列ならば，$abc \neq 0$ のとき，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$ から，$b^2=ac$ となる。

逆に，$b^2=ac$，$abc\neq 0$ ならば，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$ となり，数列 a，b，c は等比数列になる。

すなわち，**数列 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ が等比数列**（$abc\neq 0$）$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{b^2=ac}$

例　数列 3，b，12 が等比数列であるとき，$b^2=3\cdot 12=36$ より，$b=\pm 6$ となる。

例題　**等比数列をなす3つの数があって，その和は26，積は216である。この3つの数を求めよ。**

解き方　上の[1]より3つの数を a，ar，ar^2 で表す方法と，上の[2]より $b^2=ac$ の関係を使う方法の2通りの解法がある。

解答1　公比を r とし，等比数列をなす3つの数を a，ar，ar^2 とすると，条件より，

$$\begin{cases} a+ar+ar^2=26 & \cdots① \\ a\cdot ar\cdot ar^2=216 & \cdots② \end{cases}$$

②より，$(ar)^3=216$

$$(ar)^3=6^3$$
$$ar=6$$
$$r=\frac{6}{a} \qquad \cdots③$$

①に代入して，$a+6+a\cdot\dfrac{6^2}{a^2}=26$

$$a^2-20a+36=0$$
$$(a-2)(a-18)=0$$
$$a=2,\ 18$$

③より，$a=2$ のとき，$r=3$

$a=18$ のとき，$r=\dfrac{1}{3}$

よって，求める3つの数は，

2，6，18　　**答**　2，6，18

解答2　等比数列をなす3つの数を a，b，c とすると，

条件より，$\begin{cases} b^2=ac & \cdots① \\ a+b+c=26 & \cdots② \\ abc=216 & \cdots③ \end{cases}$

①，③より，$b^3=216$

$$b^3=6^3$$
$$b=6$$

①より，$ac=36$　　$\cdots④$

②より，$a+c=20$　　$\cdots⑤$

④，⑤より，$a(20-a)=36$

$$a^2-20a+36=0$$
$$(a-2)(a-18)=0$$
$$a=2,\ 18$$

④より，$a=2$ のとき，$c=18$

$a=18$ のとき，$c=2$

よって，求める3つの数は，

2，6，18　　**答**　2，6，18

確認問題11　**次の問いに答えよ。**

□(1)　数列 12，b，$\dfrac{16}{3}$ が等比数列であるとき，b の値を求めよ。

□(2)　等比数列をなす3つの数があって，その和は19で，積は216である。この3つの数を求めよ。

□(3)　数列 a，$4\sqrt{3}$，b が等比数列になり，数列 a，$\dfrac{b}{2}$，-8 が等差数列になるとき，a，b の値を求めよ。

□(4)　異なる3つの数 a，b，c が a，b，c の順序で等差数列になっていて，b，c，a の順序で等比数列になっている。a，b，c の和が12であるとき，a，b，c の値を求めよ。

Point ⑫ 等比数列の和

等比数列の和……初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$$\begin{array}{rrl} & S_n = & a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ -) & rS_n = & \quad\ \ ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline & (1-r)S_n = & a + 0 + 0 + \cdots\cdots + 0 + 0 - ar^n \end{array}$$

すなわち，$(1-r)S_n = a(1-r^n)$

よって，$1-r \neq 0$，すなわち $r \neq 1$ のとき，$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$1-r=0$，すなわち $r=1$ のとき，$S_n = \underbrace{a+a+a+\cdots\cdots+a}_{n\text{個}} = na$

したがって，初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和 S_n は，

$r \neq 1$ のとき，$\boldsymbol{S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}}$

$r=1$ のとき，$\boldsymbol{S_n = na}$

例　初項 5，公比 -3，項数 n の等比数列の和は，

$$\frac{5\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)} = \frac{5}{4}\{1-(-3)^n\}$$

例題　**等比数列 1，$4p$，$16p^2$，$64p^3$，……，4^np^n の和を求めよ。**

解き方　公比 $\neq 1$ と公比 $=1$ の場合に分けて考える。また，項数に注意する。

解答　この等比数列は初項 1，公比 $4p$ の等比数列で，一般項(第 n 項)は $1\cdot(4p)^{n-1} = 4^{n-1}p^{n-1}$ であるから，末項の 4^np^n は第 $(n+1)$ 項である。

よって，その和は，

$4p \neq 1$，すなわち $p \neq \dfrac{1}{4}$ のとき，$\dfrac{1\cdot\{(4p)^{n+1}-1\}}{4p-1} = \dfrac{(4p)^{n+1}-1}{4p-1}$

$4p = 1$，すなわち $p = \dfrac{1}{4}$ のとき，$\underbrace{1+1+1+\cdots\cdots+1}_{(n+1)\text{個}} = n+1$

答　$\begin{cases} p \neq \dfrac{1}{4} \text{ のとき，} \dfrac{(4p)^{n+1}-1}{4p-1} \\ p = \dfrac{1}{4} \text{ のとき，} n+1 \end{cases}$

確認問題 12　**次の問いに答えよ。**

□(1)　次の等比数列の和を求めよ。

□①　初項 1，公比 -3，項数 5　　□②　初項 6，公比 $\dfrac{1}{2}$，項数 6

□(2)　次の等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

□①　9，36，144，576，……　　□②　7，-0.7，0.07，-0.007，……

□(3)　次の等比数列の和を求めよ。

□①　7，14，28，……，896　　□②　1，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{25}$，……，$\dfrac{1}{5^n}$

□③　x，$-x^2$，x^3，……，$(-1)^{n-1}x^n$　　□④　1，$\dfrac{p}{3}$，$\dfrac{p^2}{9}$，$\dfrac{p^3}{27}$，……，$\dfrac{p^{n+1}}{3^{n+1}}$

Point 13 等比数列の和の利用

和から一般項を求める……初項a，公比r，項数n，末項l，和S_nのうちのいくつかがわかれば，$l=ar^{n-1}$，

$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ $(r\neq1)$を使って等式ができ，残りの要素が求められる。

例題 初項から第3項までの和が15，初項から第6項までの和が-105である等比数列の初項と公比を求めよ。

解き方 和の公式からaを消去し，rを求める方法と，$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}=S_n$から，$a$を消去し，$r$を求める方法の2通りの解法がある。

解答1 初項をa，公比をr，初項から第n項までの和をS_nとする。

$r=1$のときは条件を満たさないので，

$r\neq1$

$S_3=15$より，

$\dfrac{a(1-r^3)}{1-r}=15$ …①

$S_6=-105$より，

$\dfrac{a(1-r^6)}{1-r}=-105$ …②

②より，$\dfrac{a(1+r^3)(1-r^3)}{1-r}=-105$

これに①を代入して，

$15(1+r^3)=-105$

$r^3=-8$

$r^3=(-2)^3$

$r=-2$

①より，$a=5$

よって，初項は5，公比は-2である。

答 初項は5，公比は-2

解答2 初項をa，公比をr，初項から第n項までの和をS_nとすると，

$S_3=15$より，

$a+ar+ar^2=15$ …①

$S_6=-105$より，

$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+ar^5=-105$ …②

②より，

$a+ar+ar^2+r^3(a+ar+ar^2)=-105$

これに①を代入して，

$15+15r^3=-105$

$r^3=-8$

$r^3=(-2)^3$

$r=-2$

①より，$a=5$

よって，初項は5，公比は-2である。

答 初項は5，公比は-2

確認問題13 次の問いに答えよ。

□(1) 次のような等比数列において，〔 〕内のものを求めよ。

□① 初項が7，公比が2，和が441 〔項数〕

□② 公比が$\dfrac{1}{3}$，初項から第5項までの和が121 〔初項〕

□③ 初項が-3，末項が-768，和が-513 〔公比と項数〕

□(2) 次の等比数列において，初項と公比を求めよ。

□① 初項から第3項までの和が7，初項から第6項までの和が-182

□② 初項から第3項までの和が13，第4項から第6項までの和が-832

□③ 第2項が6，初項から第3項までの和が19

Point 14 等比数列の応用

例 題 **毎年の初めに一定の金額 a 円を，年利率 r の1年ごとの複利で積み立てるとき，n 年後の年末における積立金の元利合計 S を求めよ。**

解き方 1年後，2年後，3年後，…… の元利合計は $a(1+r)$，$a(1+r)^2$，$a(1+r)^3$，…… となる。

解 答 各年の初めに積み立てた元金 a 円は，それぞれ右のようになるから，元利合計 S は，

1年後	2年後	……	$(n-1)$ 年後	n 年後
$a(1+r)$	$a(1+r)^2$	……	$a(1+r)^{n-1}$	$a(1+r)^n$
	$a(1+r)$		$a(1+r)^{n-2}$	$a(1+r)^{n-1}$
			⋮	⋮
			$a(1+r)$	$a(1+r)^2$
				$a(1+r)$

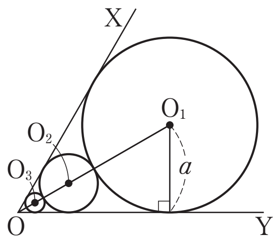
$$S=a(1+r)+a(1+r)^2+\cdots\cdots+a(1+r)^n \text{（円）}$$

これは，初項 $a(1+r)$，公比 $1+r$，項数 n の等比数列の和で，

$$S=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)-1}$$
$$=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r} \text{（円）}$$

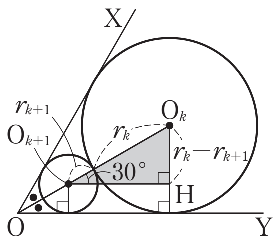
答 $S=\dfrac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$ 円

例 題 **右の図のように，$\angle XOY=60^\circ$ となる2つの半直線OX，OYに接する円 O_1，O_2，O_3，……，O_n がある。円 O_{k+1} $(k=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$ は，円 O_k に外接しており，円 O_1 の半径を a とする。このとき，円 O_n の半径 r_n を求めよ。**



解き方 数列 $\{r_n\}$ は等比数列となることが予想される。
r_k と r_{k+1} の関係を調べ，$r_{k+1}=pr_k$ となる定数 p を見つける。

解 答 右の図において，$O_kO_{k+1}=r_k+r_{k+1}$
$O_kH=r_k-r_{k+1}$



$\angle O_kO_{k+1}H=30^\circ$ より，$O_kO_{k+1}=2O_kH$

よって，$r_k+r_{k+1}=2(r_k-r_{k+1})$

$$r_{k+1}=\frac{1}{3}r_k \quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

また，　$r_1=a$

したがって，数列 $\{r_n\}$ は初項 a，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから，

$$r_n=a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{a}{3^{n-1}}$$

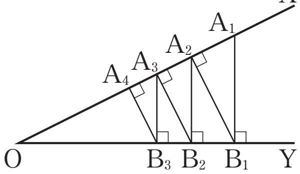
答 $r_n=\dfrac{a}{3^{n-1}}$

確認問題14 次の問いに答えよ。

□(1) 年利率3％の1年ごとの複利で，毎年の初めに4万円ずつ5年間積み立てるとき，5年後の年末における元利合計を求めよ。ただし，$1.03^5=1.159$ とし，100円未満を切り捨てよ。

□(2) 毎年の初めに一定額ずつ積み立てて，10年間で100万円にしたい。年利率2％，1年ごとの複利のとき，いくらずつ積み立てるとよいか。ただし，$1.02^{10}=1.219$ とし，100円未満を切り上げよ。

□(3) 右の図のように，$\angle XOY$ の2辺OX，OY上にそれぞれ点 A_1，A_2，A_3，……，および点 B_1，B_2，B_3，…… を，A_1B_1，A_2B_2，A_3B_3，…… はすべてOYに垂直，B_1A_2，B_2A_3，B_3A_4，…… はすべてOXに垂直であるようにとり，$OA_1=\sqrt{5}$，$OB_1=2$ とする。$\triangle A_nB_nA_{n+1}$ の面積 a_n を求めよ。



練成問題 A

1 次の問いに答えよ。 ➡ Point ❷

□(1)　次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

□①　100，91，82，……　　□②　初項が -12，第 7 項が 30

□(2)　公差が -3，第 6 項が 10 である等差数列がある。-53 はこの数列の第何項か。

□(3)　第 5 項が 52，第 14 項が 160 である等差数列がある。500 を超えない最大の項は第何項か。

2 次の問いに答えよ。 ➡ Point ❸・❹

□(1)　数列 1，a，-5，b が等差数列であるとき，a，b の値を求めよ。

□(2)　等差数列をなす 3 つの数がある。その和は 9 で，平方の和は 77 である。この 3 つの数を求めよ。

□(3)　一般項が $4n-1$ で表される数列 $\{a_n\}$ に対し，一般項が $b_n=3a_{2n}$ である数列 $\{b_n\}$ は等差数列であることを示せ。また，等差数列 $\{b_n\}$ の初項と公差を求めよ。

3 次の問いに答えよ。 ➡ Point ❺・❻

□(1)　次の等差数列の和を求めよ。

□①　初項 70，公差 -25，項数 14　　□②　4，11，18，……，235

□(2)　初項が 38，公差が -4 の等差数列において，初項から第何項までの和が 198 になるか。

□(3)　1 から 200 までの自然数のうち，次のような数の和を求めよ。

□①　7 で割ると 4 余る数　　□②　5 で割り切れない数

□(4)　2 桁の自然数のうち，3，4 のいずれでも割り切れない数の和を求めよ。

4 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 ➡ Point ❼

□(1)　初項が 50，末項が -27，和が 138

□(2)　初項が -1，第 10 項から第 15 項までの和が 17

□(3)　初項から第 5 項までの和が 12，初項から第 20 項までの和が -12

5 初項が 88，第 29 項が -52 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，S_n が最大になるときの n の値と，その最大値を求めよ。 ➡ Point ❽

□

6 $a_n=3n$，$b_n=4n+1$（$n=1$，2，……）で定義される 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ のどちらにも現れる値のうち，500 以下になるものの個数とその総和を求めよ。 ➡ Point ❾

□

7 次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 ➡ Point ❿

□(1) 3，$-\frac{3}{4}$，$\frac{3}{16}$，……

□(2) 初項が $\frac{1}{50}$，第 3 項が $\frac{1}{2}$

□(3) 第 2 項が -3，第 5 項が 648

□(4) 第 3 項が 48，第 7 項が 243

8 次の問いに答えよ。 ➡ Point ⓫

□(1) 等比数列をなす 3 つの数があって，その和が 39，積は 1000 であるという。この 3 つの数を求めよ。

□(2) 3 つの数 1，a，b が等差数列をなし，b^2，a，1 が等比数列をなすとき，a，b の値を求めよ。

9 次の問いに答えよ。 ➡ Point ⓬・⓭

□(1) 次の等比数列の和を求めよ。

□① 初項 18，公比 $\frac{1}{3}$，項数 4

□② 5，-10，20，……，1280

□③ $4x$，$16x^2$，$64x^3$，……，$4^{n+3}x^{n+3}$

□④ 1，$p-1$，$(p-1)^2$，……，$(p-1)^n$

□(2) 次の等比数列において，〔 〕内のものを求めよ。ただし，③では公比は負の数であるとする。

□① 初項が 2，公比が 3，和が 728 〔項数〕

□② 第 3 項が 8，初項から第 3 項までの和が 14 〔初項と公比〕

□③ 初項から第 4 項までの和が -15，第 5 項と第 6 項との和が -48 〔初項と公比〕

10 毎年の初めに一定額ずつ積み立てて，10 年間で 50 万円にしたい。年利率 3 %，1 年ごとの複利のとき，いくらずつ積み立てるとよいか。ただし，$1.03^{10}=1.343$ とし，100 円未満を切り上げよ。 ➡ Point ⓮

□

練成問題 B

1 次の問いに答えよ。

□(1)　第 3 項が 15，第 10 項が 43 である等差数列において，第何項が初めて 100 を超えるか。

□(2)　数列 20，x，y，10 の逆数を項とする数列 $\frac{1}{20}$，$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{10}$ が等差数列であるとき，x，y の値を求めよ。

□(3)　等差数列をなす 5 つの数があって，その和は 45，平方の和は 445 である。この 5 つの数を求めよ。

□(4)　数列 a，b，c が等差数列をなし，$a:c=5:3$ ならば，数列 a^2，$\frac{b^2}{2}$，$-c^2$ も等差数列をなすことを証明せよ。

□(5)　$0<\theta<\pi$ とする。数列 $\sin\theta$，$\sin 2\theta$，$\sin 3\theta$ が等差数列をなすとき，θ を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

□(1)　2 つの数 5 と k の間に 4 個の数を入れて，この順で等差数列になるようにする。この 6 個の数の和が 120 であるとき，数 k の値と公差 d を求めよ。　（福井工業大）

□(2)　100 から 1000 までの自然数のうち，3 の倍数ではあるが，7 の倍数ではない数の和を求めよ。　（山形大）

□(3)　初項が 3，公差が d の等差数列がある。初めの n 項の和が，次の n 項の和の $\frac{1}{3}$ に等しいとき，d の値を求めよ。　（早稲田大）

□(4)　初項が 87，第 29 項が -53 である等差数列がある。この数列の各項の絶対値を項とする数列の第 30 項までの和を求めよ。

□(5)　各項が整数の等差数列がある。この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，S_n は $n=10$ のとき最大値 500 をとるという。この数列の初項と公差を求めよ。　（群馬大）

□(6)　a と b を整数とする。a と b の間にあり，分母を 5 とする既約分数の総和を求めよ。　（中央大）

□(7)　$a_n=3n-2$，$b_n=4n+1$，$c_n=7n$（$n=1$，2，3，……）で定義される 3 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ のどれにも現れる値のうち，1000 以下となるものの個数を求めよ。　（横浜国立大）

3 **次の問いに答えよ。**

□(1) 数列 $\sqrt{2}-1$，1，$\sqrt{2}+1$，$3+2\sqrt{2}$，…… の一般項 a_n を求めよ。

□(2) 数列 a，b，2，c，18 は，各項が正の等比数列である。このとき，a，b，c の値を求めよ。

□(3) $a_n=3^n$，$b_n=5^n$ とするとき，$c_n=a_nb_n$ で定められる数列 $\{c_n\}$ は等比数列であることを証明せよ。

□(4) 等比数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{a_n+2a_{n+1}\}$ は初項 3，公比 2 の等比数列になるという。このとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 （東京理科大）

□(5) 三角形の 3 辺の長さが小さい順に等比数列をなすとき，その公比 r の満たすべき条件を求めよ。ただし，$r>1$ とする。

□(6) $-1<a<0<b$ とする。3 つの数 -1，a，b は適当な順に並べると等差数列になる。また，ある順に並べると等比数列にもなる。このとき，a，b の値を求めよ。 （足利工業大）

4 **初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項 b，公比 r の等比数列 $\{b_n\}$ があり，数列 $\{c_n\}$ は $c_n=a_n+b_n$ により定まる数列とする。a，b，d，r がすべて正の整数で，$c_1=4$，$c_2=9$，$c_3=17$ のとき，次の問いに答えよ。** （東京女子大）

□(1) a，b，d，r の値を求めよ。

□(2) 数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

5 **初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ において，$a_1<a_2$，$a_1+a_2+a_3=42$，$a_1a_2a_3=512$ とする。ただし，a，r は実数である。次の問いに答えよ。** （県立広島大）

□(1) 初項 a と公比 r を求めよ。

□(2) $S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$（$n=1$，2，3，……）とするとき，$S_n>10^5$ を満たす最小の n を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

6 **次の問いに答えよ。**

□(1) 1000 万円を年利率 6 % で借り，返済は 1 年後を第 1 回とし，その後毎年等額ずつ支払い，10 年間で返済を完了する。毎年支払う金額は何円か。ただし，$1.06^{10}=1.791$ とし，1000 円未満を切り上げよ。

□(2) 半径 r の内接円をもつ正三角形 $A_1B_1C_1$ の外接円の半径を r_1 とする。一般に，半径 r_{n-1} の内接円をもつ正三角形を $\triangle A_nB_nC_n$ とし，その外接円の半径を r_n とする（$n=2$，3，……）。$\triangle A_nB_nC_n$ の面積を S_n とするとき，$S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n$ を求めよ。 （南山大改）

5 数列のまとめ

学習日　　月　　日

入試問題研究（基本編１）

1 次の問いに答えよ。また，空欄に当てはまる数や式を答えよ。

□(1)　初項が -10，第 10 項が 17 の等差数列の公差は $\boxed{}$。　（法政大）

□(2)　第 53 項が -47，第 77 項が -95 である等差数列がある。この数列において，第何項が初めて負の数になるか。　（福岡教育大）

□(3)　等差数列をなす 3 つの数があり，それらの和が 27 で，積が 704 である。この 3 つの数を求めよ。　（徳島文理大）

□(4)　1 から 100 までの自然数の和は $\boxed{}$ である。また，$\sum_{k=1}^{n} k > 200$ となるような最小の自然数 n は $\boxed{}$ である。　（北海道工業大）

□(5)　初項 99，公差 -5 の等差数列で初項から第 n 項までの和が最大となるのは n が $\boxed{}$ のときである。また，そのときの和を求めると $\boxed{}$ である。　（東北学院大）

□(6)　初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ に対して $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく。$S_{10} = -5$，$S_{16} = 8$ が成り立つとき，$a = \boxed{}$，$d = \boxed{}$ であり，S_1，S_2，S_3，……，S_{50} の中の最小値は $\boxed{}$ である。　（昭和薬科大）

□(7)　2 桁の自然数のうち，3 または 7 で割り切れる数の和は $\boxed{}$ であり，3 でも 7 でも割り切れない数の和は $\boxed{}$ である。　（立教大）

□(8)　等比数列の第 2 項が 54，第 5 項が 16 のとき，初項 a_1 は $\boxed{}$，公比は $\boxed{}$，一般項 a_n は $\boxed{}$ となる。　（静岡理工科大）

□(9)　3 個の数 2，a，b はこの順に等差数列をなし，3 個の数 a，b，9 はこの順に等比数列をなすとき，$a = \boxed{}$，$b = \boxed{}$ または $a = \boxed{}$，$b = -\boxed{}$ である。　（摂南大）

□(10)　数列 $\{a_n\}$ は等比数列をなし，$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4(a_1 + a_3) = 80$ を満たしている。　（広島工業大）

□①　一般項 a_n を求めよ。

□②　$\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

2 次の問いに答えよ。また，空欄に当てはまる数や式を答えよ。

□(1)　数列 $1\cdot3$，$3\cdot4$，$5\cdot5$，$7\cdot6$，…… の初項から第 n 項までの和を求めよ。　（関西学院大）

□(2)　n を奇数として，$S=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots\cdots-(n-1)^2+n^2$ を考える。$n=2m-1$ とおくと，S は和の記号 $\sum$ を用いて，$S=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)^2-\boxed{\quad}$ と表せるので，S は m の式として求めることができ，それを n の式に直せば，$S=\boxed{\quad}$ となる。　（東京歯科大）

□(3)　自然数の列 2，4，7，11，16，…… において，45 番目の数は $\boxed{\quad}$ である。　（昭和薬科大）

□(4)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n^3-21n^2+110n$（$n\geqq1$）であるとき，一般項 a_n を求めよ。　（佐賀大）

□(5)　数列 1，$-1+2$，$1-2+2^2$，$-1+2-2^2+2^3$，…… の第 $\boxed{\quad}$ 項は 1365 である。　（中京大）

□(6)　数列の和 $\dfrac{1}{7\cdot9}+\dfrac{1}{9\cdot11}+\dfrac{1}{11\cdot13}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{99\cdot101}$ を計算して既約分数 $\dfrac{a}{b}$ で表すと，$a=\boxed{\quad}$，$b=\boxed{\quad}$ である。　（北海道工業大）

□(7)　数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$（$n=1$，2，3，……）と定めるとき，$\{a_n\}$ の初項から第 143 項までの和は $\boxed{\quad}$ となる。　（早稲田大）

□(8)　n を自然数とするとき，　（山形大）

□①　等式 $\dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}=a\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)+b\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+3}\right)$ がすべての n に対して成り立つような，定数 a，b を求めよ。

□②　①の結果を利用して，和 $S_n=\dfrac{1}{1\cdot2\cdot4}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}$ を求めよ。

□(9)　$|x|\neq1$ のとき，$1+2x^2+3x^4+\cdots\cdots+nx^{2(n-1)}$ の和を求めよ。　（創価大）

□(10)　1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，…… と自然数 n を n 個ずつ並べていった数列において，第 200 項は $\boxed{\quad}$ であり，また，初項から第 200 項までの和は $\boxed{\quad}$ である。　（愛知工業大）

□(11)　数列 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{2}{4}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{1}{5}$，…… について，　（昭和女子大）

□①　$\dfrac{19}{25}$ は第何項か。

□②　初項から $\dfrac{19}{25}$ までの総和を求めよ。

3 次の問いに答えよ。また，空欄に当てはまる数や式を答えよ。

□(1)　初項 $a_1=0$，漸化式 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{n(n-1)}{2}+1$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。（中部大）

□(2)　$a_1=-1$，$a_{n+1}=-3a_n+8$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）で定義される数列がある。このとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\boxed{}$ となる。（神戸薬科大）

□(3)　数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4n$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）によって定める。数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_{n+1}-a_n$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）によって定めると数列 $\{b_n\}$ は漸化式

$$b_{n+1}=\boxed{}\,b_n+\boxed{}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たす。したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は $\boxed{}$ であり数列 $\{a_n\}$ の一般項は $\boxed{}$ である。（同志社大）

□(4)　数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）で定義されているとき，（早稲田大）

$$\sum_{k=1}^{100}a_ka_{k+1}=a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_{100}a_{101}=\boxed{}$$

□(5)　$a_1=1$，$5a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の a_2，a_3 の値を求めよ。また，a_n を n で表せ。（摂南大）

□(6)　次の関係式で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。（信州大）

$$a_1=4,\quad a_{n+1}=4a_n-2^{n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

□(7)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=-\dfrac{1}{3}a_n+5n-\dfrac{7}{3}$ を満たすとする。このとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。（日本大）

□(8)　数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{2}$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）で定義されているとき，$a_n$（$n\geqq 2$）を n の式で表すと $a_n=\boxed{}$ である。（関西学院大）

□(9)　$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}=-a_{n+1}+2a_n$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\boxed{}$ である。（慶應義塾大）

□(10)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，

$$\begin{cases}a_1=1\\ b_1=2\end{cases},\quad \begin{cases}a_{n+1}=a_n+2b_n\\ b_{n+1}=2a_n+b_n\end{cases},\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

の関係がある。（東北学院大）

□①　a_n+b_n を n の式で表すと，$\boxed{}$ である。

□②　a_n を n の式で表すと，$\boxed{}$ である。

4 **次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ について，あとの問い に答えよ。** （甲南大）

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}a_n{}^2$$

□(1)　a_2+a_3 を求めよ。

□(2)　$b_n=\log_2 a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

□(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

5 **箱の中に，数字の 1 が書かれたカードと数字の 2 が書かれたカードが，それぞれ 1 枚ずつ入っている。この箱の中から 1 枚のカードを取り出し，数字を記録して箱に戻す。これを n 回繰り返したとき，記録された数字の和が 3 の倍数である確率を P_n とする。次の問いに答えよ。** （富山大）

□(1)　P_1，P_2 を求めよ。

□(2)　P_{n+1} を P_n を用いて表せ。

□(3)　P_n を n を用いて表せ。

6 **次の問いに答えよ。**

□(1)　n を自然数とするとき，$2^{3n-2}+3^n$ は 5 の倍数であることを数学的帰納法によって証明せよ。 （会津大）

□(2)　正数 a，b，x，y を考える。$a+b=1$ ならば，すべての自然数 n に対して不等式

$$(ax+by)^n \leqq ax^n+by^n$$

が成立することを証明せよ。 （慶應義塾大）

7 $a_n=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}$ **とする。次の問いに答えよ。** （小樽商科大）

□(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ に対して，a_n を求めよ。

□(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定し，それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

8 **数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_2=2$ と関係式**

$$a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定めるとき，次の問いに答えよ。 （横浜国立大）

□(1)　$a_n<a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

□(2)　$a_{n+1}{}^2+1=a_na_{n+2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

入試問題研究（基本編２）

1 次の問いに答えよ。

□(1)　初項が a_1 で，公差 d が整数である等差数列 $\{a_n\}$ が，2 つの条件

(A)　$a_3+a_5+a_7=93$

(B)　$a_n>100$ となる最小の n は 15 である

を満たすとする。このとき，公差 d は $\boxed{\text{ア}}$ であり，初項 a_1 は $\boxed{\text{イ}}$ である。

また，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i>715$ となる最小の n は $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

□(2)　等差数列 $\{a_n\}$ に対して，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく。ここで，初項 $a_1=38$，第 $(m+1)$ 項 $a_{m+1}=5$，$S_{m+1}=258$ とする。このとき，$m=\boxed{\text{アイ}}$ であり，公差は $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

また，S_n は $n=\boxed{\text{オカ}}$ のとき最大となり，その最大値は $\boxed{\text{キクケ}}$ である。

□(3)　$b_n=pn+q$ で表される数列 $\{b_n\}$ に対して，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$b_7=1$，$S_{12}=10$ ならば，$p=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，$q=\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ であり，$S_1+S_2+\cdots\cdots+S_{12}=\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

□(4)　公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項までの和 S_n を定数 p，q，r を用いて，

$S_n=pn^2+qn+r$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）と表す。このとき，$p=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}d$，$r=\boxed{\text{ウ}}$ である。

特に，$p=2$，$q=3$ となるのは，$a_1=\boxed{\text{エ}}$ のときであり，一般項は $a_n=\boxed{\text{オ}}\,n+\boxed{\text{カ}}$ である。

これより，$a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_na_{n+1}=\dfrac{n(\boxed{\text{キク}}\,n^2+\boxed{\text{ケコ}}\,n+\boxed{\text{サシ}})}{\boxed{\text{ス}}}$

$\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{n}{\boxed{\text{セ}}(\boxed{\text{ソ}}\,n+\boxed{\text{タ}})}$ が成り立つ。

2 次の問いに答えよ。

□(1)　等比数列 18，$-6\sqrt{3}$，6，$\cdots\cdots$ の第 6 項は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ であり，初項から第 15 項までの奇数番目の項の和は $\dfrac{\boxed{\text{オカキク}}}{\boxed{\text{ケコサ}}}$ である。

□(2)　初項が 0 でない等比数列 $\{a_n\}$ が $a_1+2a_2=0$ を満たしている。このとき，公比は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

$a_1+a_2+a_3=\dfrac{9}{4}$ ならば，$a_4+a_5+a_6=\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ であり，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_n}=57$ となるのは，$n=\boxed{\text{ク}}$ のときである。

□(3)　数列 $\{b_n\}$ の各項から定数 c を引いて得られる数列は，公比 2 の等比数列である。

$b_3=7$，$b_4=11$ であるとき，$c=\boxed{\text{ア}}$，$b_1=\boxed{\text{イ}}$ である。また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} b_k=\boxed{\text{ウエオカ}}$ である。

□(4)　等比数列 $\{b_n\}$ の初項 b_1 と公比 r は正の数とし，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ とおく。この数列 $\{T_n\}$ は $5T_2=4T_4$ を満たすとする。ここで，$T_4=(r^2+\boxed{\text{ア}})T_2$ であるので，数列 $\{b_n\}$ の公比は $r=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

さらに p を定数とし，$U_n=p+T_n$ とおく。$p=\boxed{\text{エオ}}b_1$ であるならば，数列 $\{U_n\}$ は等比数列となる。

3　**p を 0 でない実数とし，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=pn^2-pn+p+3$ で表されている。このとき，$a_1=p+\boxed{\text{ア}}$，$a_2=\boxed{\text{イ}}p$，$a_3=\boxed{\text{ウ}}p$ である。次の問いに答えよ。**

□(1)　$\{a_n\}$ が等差数列のとき，$p=\boxed{\text{エオ}}$ であり，$a_n=\boxed{\text{カキ}}n+\boxed{\text{ク}}$ となる。

さらに，$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k+1)a_k=\boxed{\text{ケコサシス}}$ である。

□(2)　$\{b_n\}$ を公比 r の等比数列とし，$b_1=a_1$，$b_2=-2a_2$，$b_3=3a_3$ とする。このとき，$r=\boxed{\text{セソ}}$，$p=\boxed{\text{タ}}$ である。また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k>900$ となる n のうちで最小のものは $\boxed{\text{チ}}$ である。

4　**10 項からなる 2 つの数列**

2，4，6，8，10，12，14，16，18，20

2，4，8，16，32，64，128，256，512，1024

を横と縦に並べる。それぞれの数列から項を 1 つずつ選び，積を表にする。右の表はその一部分が書かれている。次の問いに答えよ。

	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
2	4	8								40
4	8	16								
8										
16										
32										
64										
128										
256										
512										
1024	2048									20480

□(1)　太枠内の一番上に現れる数の和 $4+8+\cdots\cdots+40$ は $\boxed{\text{アイウ}}$ である。

□(2)　太枠内の一番左に現れる数の和 $4+8+\cdots\cdots+2048$ は $\boxed{\text{エオカキ}}$ である。

□(3)　太枠内に現れるすべての数の和は $\boxed{\text{クケコサシス}}$ である。

□(4)　太枠内の左上から右下に向かう対角線の部分に現れる数の和を S とすると，

$S-2S=2\cdot2+2\cdot2^2+2\cdot2^3+\cdots\cdots+2\cdot2^{\boxed{\text{セソ}}}-20\cdot2^{\boxed{\text{タチ}}}$ が成り立つので，$S=\boxed{\text{ツテトナニ}}$ である。

5 **自然数の列 1，2，3，4，…… を，次のように群に分ける。**

$$1 \mid 2,\ 3,\ 4,\ 5 \mid 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12 \mid \cdots\cdots$$

第 1 群　第 2 群　第 3 群

ここで，一般に第 n 群は $(3n-2)$ 個の項からなるものとする。第 n 群の最後の項を a_n で表す。

□(1)　$a_1=1$，$a_2=5$，$a_3=12$，$a_4=\boxed{アイ}$ である。

$$a_n-a_{n-1}=\boxed{ウ}n-\boxed{エ}\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$$

が成り立ち

$$a_n=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}n^{\boxed{キ}}-\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

である。

よって，600 は，第 $\boxed{コサ}$ 群の小さい方から $\boxed{シス}$ 番目の項である。

□(2)　$n=1$，2，3，…… に対し，第 $(n+1)$ 群の小さい方から $2n$ 番目の項を b_n で表すと

$$b_n=\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}n^{\boxed{タ}}+\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}n$$

であり

$$\frac{1}{b_n}=\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\boxed{ナ}}\right)$$

が成り立つ。これより

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\frac{\boxed{ニ}n}{\boxed{ヌ}n+\boxed{ネ}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

となる。

6 **$\{a_n\}$ を初項 a_1 が 1 で公比が $\frac{1}{3}$ の等比数列とする。数列 $\{a_n\}$ の偶数番目の項を取り出して，数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_{2n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定める。$T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ とおく。**

□(1)　$\{b_n\}$ も等比数列であり，その初項は $\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，公比は $\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

したがって，$T_n=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\left(1-\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}^{\,n}}\right)$ である。

また，積 $b_1b_2\cdots\cdots b_n$ を求めると，$b_1b_2\cdots\cdots b_n=\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}^{\,n^2}}$ となる。

□(2)　次に，数列 $\{c_n\}$ を $c_n=2n\cdot b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定め，$U_n=\sum_{k=1}^{n}c_k$ とおく。

$$\boxed{サ}c_{n+1}-c_n=\boxed{シ}b_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つから

$$\sum_{k=1}^{n}(\boxed{サ}c_{k+1}-c_k)=\boxed{シ}T_n \qquad \cdots①$$

である。また，この左辺の和をまとめ直すと，U_n，c_{n+1}，c_1 を用いて

$$\sum_{k=1}^{n}(\boxed{サ}c_{k+1}-c_k)=\boxed{ス}U_n+\boxed{セ}c_{n+1}-\boxed{ソ}c_1 \qquad \cdots②$$

と表される。

①と②より，$U_n=\frac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツテ}}-\frac{\boxed{トナ}n+\boxed{ニヌ}}{\boxed{ツテ}}\cdot\frac{1}{\boxed{ネ}^{\,n}}$ となる。

7

□(1)　数列 $\{p_n\}$ は次を満たすとする。

$$p_1=3,\ p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\quad \cdots①$$

数列 $\{p_n\}$ の一般項と，初項から第 n 項までの和を求めよう。まず，①から

$$p_{n+1}-\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}=\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\right)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

となるので，数列 $\{p_n\}$ の一般項は，$p_n=\dfrac{1}{\boxed{\text{ウ}}\cdot\boxed{\text{エ}}^{\,n-2}}+\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

したがって，自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}p_k=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\left(1-\frac{1}{\boxed{\text{ケ}}^{\,n}}\right)+\frac{\boxed{\text{コ}}\,n}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

□(2)　正の数からなる数列 $\{a_n\}$ は，初項から第3項が $a_1=3$，$a_2=3$，$a_3=3$ であり，すべての自然数 n に対して

$$a_{n+3}=\frac{a_n+a_{n+1}}{a_{n+2}}\quad \cdots②$$

を満たすとする。また，数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を，自然数 n に対して $b_n=a_{2n-1}$，$c_n=a_{2n}$ で定める。

数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項を求めよう。まず，②から

$$a_4=\frac{a_1+a_2}{a_3}=\boxed{\text{シ}},\qquad a_5=3,\qquad a_6=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}},\qquad a_7=3$$

である。したがって $b_1=b_2=b_3=b_4=3$ となるので

$$b_n=3\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\quad \cdots③$$

と推定できる。

③を示すためには，$b_1=3$ から，すべての自然数 n に対して

$$b_{n+1}=b_n\quad \cdots④$$

であることを示せばよい。このことを数学的帰納法を用いて証明しよう。

[1]　$n=1$ のとき，$b_1=3$，$b_2=3$ であることから④は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，④が成り立つ，すなわち

$$b_{k+1}=b_k\quad \cdots⑤$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，②の n に $2k$ を代入して得られる等式と，$2k-1$ を代入して得られる等式から

$$b_{k+2}=\frac{c_k+\boxed{\text{ソ}}_{\,k+1}}{\boxed{\text{タ}}_{\,k+1}},\qquad c_{k+1}=\frac{\boxed{\text{チ}}_{\,k}+c_k}{\boxed{\text{ツ}}_{\,k+1}}$$

となるので，b_{k+2} は，$b_{k+2}=\dfrac{\left(\boxed{\text{テ}}_{\,k}+\boxed{\text{ト}}_{\,k+1}\right)\boxed{\text{ナ}}_{\,k+1}}{b_k+c_k}$ と表される。

　したがって，⑤により，$b_{k+2}=b_{k+1}$ が成り立つので，④は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

[1]，[2]により，すべての自然数 n に対して④の成り立つことが証明された。

したがって，③が成り立つので，数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=3$ である。

次に，②の n を $2n-1$ に置き換えて得られる等式と③から

$$c_{n+1}=\frac{1}{3}c_n+1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

となり，$c_1=\boxed{\text{ニ}}$ であることと①から，数列 $\{c_n\}$ の一般項は，(1)で求めた数列 $\{p_n\}$ の一般項と等しくなることがわかる。

入試問題研究（応用編）

1 次の問いに答えよ。また，空欄に当てはまる数を答えよ。

□(1)　自然数からなる等差数列がある。この等差数列の項の最大値は 27 で，項の和は 75 である。この等差数列を求めよ。　（岐阜薬科大）

□(2)　第 2 項 a_2 が -62 で，第 10 項 a_{10} が初めて正になる公差が整数の等差数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の公差は $\boxed{}$ である。初項から第 n 項までの和が 38 になるとき $n=\boxed{}$ である。また，初項からある項までの和の絶対値の最小値は $\boxed{}$ である。　（東北工業大）

□(3)　初項 a（$a>0$），公比 r の等比数列がある。この数列の初項から第 n 項までの中で最大数は 96 であり，その和は 189 である。また，初項から第 $2n$ 項までの和は 12285 である。このとき，この数列の初項 a と公比 r を求めよ。　（東京理科大）

□(4)　3 つの数 α，β，$\alpha\beta$（$\alpha<0<\beta$）は適当に並べると等差数列になり，また，適当に並べると等比数列にもなるという。α，β を求めよ。　（群馬大）

2 次の問いに答えよ。

□(1)　1 と 400 の間にある 3 の倍数で，連続する 2 つの自然数の積に分解できるものの和を求めよ。　（福島県立医科大）

□(2)　正の整数 a，b に対して，$N=2^a\cdot3^b$ とするとき，N の正の約数の総和 S を求めよ。　（大阪女子大）

□(3)　p は素数，m，n は正の整数で $m<n$ とする。m と n の間にあって，p を分母とする既約分数の総和を求めよ。　（同志社大）

3 次の問いに答えよ。

□(1)　数列 $\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{1}{9}$，$\dfrac{1}{14}$，$\dfrac{1}{21}$，$\dfrac{1}{30}$，…… の一般項を求めよ。　（城西大）

□(2)　公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ に対して，$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$，$T_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n$ とおく。いま，$a_2=6$，$a_5=162$ とするとき，a_1，r，S_n，T_n を求めよ。　（東北工業大）

□(3)　数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの積 P_n が $\dfrac{1}{n!(n+1)!}$ で与えられるとき，$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。ただし，$a_1=\dfrac{1}{2}$ とする。　（山梨大）

4 **次の空欄に当てはまる数を答えよ。** （玉川大）

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n}k\right) \text{ は，}\quad \begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n}k\right) = 1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)+n\\ +2+3+\cdots\cdots+(n-1)+n\\ +3+\cdots\cdots+(n-1)+n\\ \vdots\quad\quad\quad\\ +(n-1)+n\\ +n\end{aligned}$$

となるから，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n}k\right)=\sum_{k=1}^{n}k^{\boxed{}}=\frac{1}{\boxed{\quad}}n(n+1)(\boxed{\quad}n+1)$ である。

□

5 **初項が a_1，公差が d の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項が b_1，公比が r の等比数列 $\{b_n\}$ がある。ただし，$b_1 \neq 0$，$r>0$ とする。$c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{c_n\}$ において，$c_1=-8$，$c_2=-1$，$c_3=1$ であるとき，次の問いに答えよ。** （中京大）

□(1) r を求めよ。

□(2) 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。また，数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

6 **自然数 k に対し，$a_k=\dfrac{(3k+1)(3k+2)}{3k(k+1)}$ で与えられる数列を考える。次の問いに答えよ。** （群馬大）

□(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を n の式で表せ。

□(2) 数列 $\{a_k\}$ から $b_1=a_1$，$b_2=a_2+a_3+a_4$，$b_3=a_5+a_6+a_7+a_8+a_9$，$\cdots\cdots$ のように，奇数個ずつの a_k の和をとり数列 $\{b_k\}$ を考えるとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k \geqq 675$ となる最小の n の値を求めよ。

7 **数列 $\{a_n\}$ を，2 でも 3 でも 5 でも割り切れない自然数を小さい順に並べてできた数列とする。すなわち，$a_1=1$，$a_2=7$，$\cdots\cdots$ である。このとき，次の問いに答えよ。** （お茶の水女子大）

□(1) 第 10 項 a_{10} を求めよ。

□(2) 第 500 項 a_{500} を求めよ。

□(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $8k$ 項までの和を求めよ。ただし，k は自然数とする。

8 **条件 $0 \leqq m \leqq 500$，$0 \leqq n \leqq \sqrt{m}$ を満たす整数の組 $(m,\ n)$ はいくつあるか。** （学習院大）

□

9 0と0の間に挟まれる2の個数を1つずつ増加させる，という規則で数列

$$0,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 0,\ \cdots\cdots$$

を作る。この数列の，初項から第 n 項までの和が初めて2002に等しくなるときの n の値を求めよ。

（兵庫医科大）

10 実数 x に対し，$[x]$ を x 以下の最大の整数とする。たとえば，$[2]=2$，$\left[\dfrac{7}{5}\right]=1$ である。数列 $\{a_k\}$ を

$$a_k=\left[\frac{3k}{5}\right]\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

と定めるとき，次の問いに答えよ。

（三重大）

(1) $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ を求めよ。

(2) $a_{k+5}=a_k+3$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を示せ。

(3) 自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{5n} a_k$ を求めよ。

11 $a_1=2$，$a_{n+1}=-2a_n+3$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を次のような群に分ける。このとき，あとの問いに答えよ。

（福島大）

$$\underset{\text{第1群}}{a_1}\ \Big|\ \underset{\text{第2群}}{a_2,\ a_3,\ a_4}\ \Big|\ \underset{\text{第3群}}{a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9}\ \Big|\ \underset{\text{第4群}}{a_{10},\ a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14},\ a_{15},\ a_{16}}\ \Big|\ \underset{\text{第5群}}{a_{17},\ \cdots\cdots}$$

(1) 第10群に含まれる項の個数を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $a_n=1025$ となる項 a_n は第何群に含まれているか求めよ。

(4) 第 k 群 $(k=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ に含まれる項の平均値を求めよ。

12 自然数1，2，3，…… を右図のように並べていくとき，次の問いに答えよ。

（宮崎大）

1	2	5	10	17	
4	3	6	11	18	
9	8	7	12		
16	15	14	13		

(1) 左から m 番目，上から m 番目の位置にある自然数を m を用いて表せ。

(2) 90は左から何番目，上から何番目の位置にあるか。

(3) 自然数 n を

$$n=k^2+l\quad (k\text{は負でない整数，}1\leqq l\leqq 2k+1)$$

と表すとき，n は左から何番目，上から何番目の位置にあるか。k，l を用いて表せ。

13 次の問いに答えよ。 （横浜国立大）

□(1) kを0以上の整数とするとき，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\leqq k$を満たす0以上の整数$x$，$y$の組$(x,\ y)$の個数を$a_k$とする。$a_k$を$k$の式で表せ。

□(2) nを0以上の整数とするとき，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+z\leqq n$を満たす0以上の整数$x$，$y$，$z$の組$(x,\ y,\ z)$の個数を$b_n$とする。$b_n$を$n$の式で表せ。

14 $a_1=1$，$a_2=6$ならびに$2(2n+3)a_{n+1}=(n+1)a_{n+2}+4(n+2)a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$で定義される数列$\{a_n\}$について，次の問いに答えよ。 （鳥取大）

□(1) $b_n=a_{n+1}-2a_n$とおくとき，b_nをnの式で表せ。

□(2) a_nをnの式で表せ。

□(3) 初項から第n項までの和$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$を求めよ。

15 どの項も0でない数列$\{a_n\}$に対し，2次方程式$a_nx^2-a_{n+1}x+a_{n+2}=0$の2つの実数解$p_n$，$q_n$が$q_n=2p_n$を満たすとし，$a_1=a_2=1$とする。次の問いに答えよ。 （同志社大）

□(1) p_1を求めよ。

□(2) p_{n+1}をp_nで表せ。

□(3) p_nを求めよ。

□(4) a_nを求めよ。

16 数列$\{a_n\}$において，初項から第n項までの和をS_nとするとき，

$$a_1=1,\quad 2a_{n+1}=2a_n+S_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つものとする。次の問いに答えよ。 （大阪市立大）

□(1) $b_n=a_{n+1}-\dfrac{1}{2}a_n$とおくとき，$b_n$を$n$の式で表せ。

□(2) a_nをnの式で表せ。

17 3つの文字a，b，cを繰り返しを許して，左から順にn個並べる。ただし，aの次は必ずcであり，bの次も必ずcである。このような規則を満たす列の個数をx_nとする。たとえば，$x_1=3$，$x_2=5$である。次の問いに答えよ。 （一橋大）

□(1) x_{n+2}をx_{n+1}とx_nで表せ。

□(2) $y_n=x_{n+1}+x_n$とおく。y_nを求めよ。

□(3) x_nを求めよ。

18 **1，2，3の番号のついたカードがそれぞれ1枚ずつある。この中からカードを任意に1枚取り出し番号を確認し，またもとに戻すという操作をn回繰り返す。出た番号を順にa_1，a_2，……，a_nとするとき，次の問いに答えよ。** （立教大）

□(1)　a_1，a_2，……，a_nの中に1，2，3がすべて入っている確率を求めよ。

□(2)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_n$となる確率を求めよ。

□(3)　$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$が4の倍数である確率を求めよ。

19 **数列a_1，a_2，……，a_n，……がある。すべての正の整数kに対して，**

$$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_k = \frac{k}{2}(a_1 + a_k)$$

が成り立つとする。次の問いに答えよ。 （愛媛大）

□(1)　$d = a_2 - a_1$とおくとき，a_3をa_1とdを用いて表せ。

□(2)　数列a_1，a_2，……，a_n，……は等差数列であることを数学的帰納法によって証明せよ。

20 **次の問いに答えよ。** （関西大）

□(1)　A，Bを正の数とするとき，不等式$1-(A+B)<(1-A)(1-B)$を証明せよ。

□(2)　$2 \leqq n$，$0<p_i<1$（$i=1$，2，……，n）のとき，次の不等式を数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$1-(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)<(1-p_1)(1-p_2)\cdots\cdots(1-p_n)$$

21 **a，bを$a \neq 0$，$a \neq 1$，$b \neq 0$，$b \neq 1$を満たす実数とする。数列$\{u_n\}$を**

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = au_n + b^n \quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

によって定めるとき，一般項u_nを推定し，その推定が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

□ （愛媛大）

22 **数列$\{a_n\}$を**

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n=3, 4, 5, \cdots\cdots)$$

により定義すると，a_nは整数である。次の問いに答えよ。 （津田塾大）

□(1)　この数列の連続する3つの項の和は常に偶数であることを示せ。

□(2)　$S_n = \sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j = -a_1 + a_2 - \cdots\cdots + (-1)^n a_n$とおくと，

$$S_n = (-1)^n a_{n-1} \quad (n=2, 3, 4, \cdots\cdots)$$

が成り立つことを示せ。

23 **次の問いに答えよ。** (大阪府立大)

□(1) 自然数 n に対して $s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$ とする。このとき数学的帰納法により，$s_n=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$ であることを示せ。

□(2) $a_1=0$，$a_2=1$ とし，自然数 n に対して，$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=n+1$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

□① $b_n=a_{n+1}-a_n$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ が満たす漸化式を求めよ。

□② b_n を(1)で与えた s_n を用いて表せ。

□③ 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

24 **関数 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ について，次の問いに答えよ。** (大阪府立大)

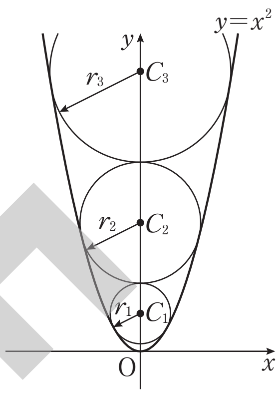
□(1) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ。

□(2) $f(2x)=\frac{2f(x)}{1+\{f(x)\}^2}$ を示せ。

□(3) すべての自然数 n に対して $b_n=f\left(\frac{1}{2^n}\right)$ は無理数であることを，数学的帰納法を用いて示せ。ただし，有理数 r，s を用いて表される実数 $r+s\sqrt{2}$ は $s\neq0$ ならば無理数であることを，証明なく用いてもよい。

25 **中心が y 軸上にある半径 r_1 の円 C_1 が放物線 $y=x^2$ に 2 点で接している。C_n（$n=2$，3，……）は y 軸上に中心をもち，放物線 $y=x^2$ に接する半径 r_n（$n=2$，3，……）の円で，C_{n-1} と図のように外接している。$r_1=1$ とするとき，r_n を n の関数で表せ。** (名古屋市立大)

□



26 **$f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{2}x$ として数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\frac{4}{3}$，$a_{n+1}=f(a_n)$（$n=1$，2，3，……）で定めるとき，次の問いに答えよ。** (東京海洋大)

□(1) $f(x)$ は区間 $\frac{4}{5}\leqq x\leqq\frac{4}{3}$ で減少することを示せ。

□(2) $\frac{4}{5}\leqq a_n\leqq\frac{4}{3}$（$n=1$，2，3，……）を示せ。

□(3) $\frac{1}{3}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}\leqq|a_n-1|\leqq\frac{1}{3}\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}$（$n=1$，2，3，……）を示せ。