目次

第１章　ベクトル

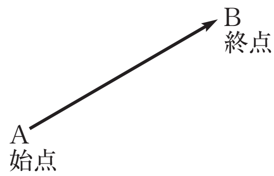
CONTENTS

1 平面上のベクトル

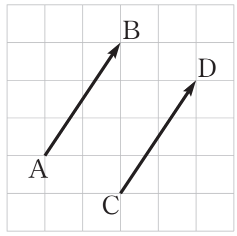
学習日　　月　　日

Point 1 ベクトルとその相等

● **有向線分**……平面上での点の移動は，向きをつけた線分で表すことができる。
このように，向きをつけた線分を**有向線分**という。
有向線分 AB では，A をその**始点**，B をその**終点**といい，その向きは A から B へ向かう向きとする。
また，線分 AB の長さを，有向線分 AB の**大きさ**という。



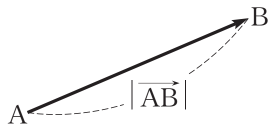
● **ベクトル**……有向線分は，位置と，向きおよび大きさで定まるが，その位置を考えずに，向きと大きさだけに着目したものを，**ベクトル**という。
ベクトルは，向きと大きさをもつ量である。



例 右の図で，有向線分 AB と有向線分 CD は，ベクトルとしては，同じものを表す。

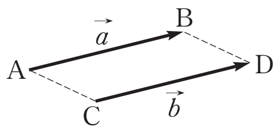
● **ベクトルの表し方**……有向線分 AB で表されるベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書く。
また，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のように，1 つの文字に矢印をつけて表すこともある。

● **ベクトルの大きさ**……有向線分 AB の長さをベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさといい，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ で表す。



● **単位ベクトル**……大きさが 1 であるベクトルを**単位ベクトル**という。

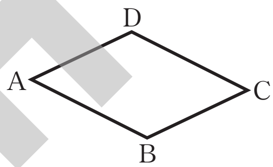
● **ベクトルの相等**……$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが同じで大きさが等しいとき，2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は**等しい**といい，$\vec{a}=\vec{b}$ と書く。
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のとき，有向線分 AB を平行移動して有向線分 CD に重ね合わせることができる。



確認問題 1 次の問いに答えよ。

□(1) 右の図の平行四辺形 ABCD について，互いに等しいベクトルの記号の組をいえ。

㋐ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　㋑ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　㋒ $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$　　㋓ $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

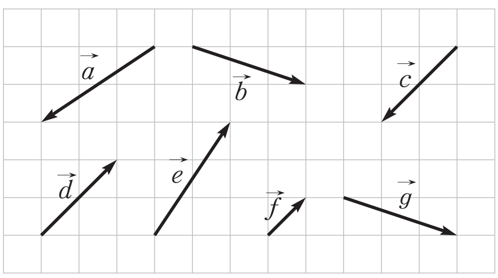


□(2) 右の図に示されたベクトルについて，次のようなベクトルの組をすべてあげよ。

□① 大きさが等しいベクトル

□② 同じ向きのベクトル

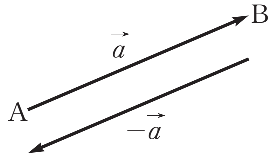
□③ 等しいベクトル



Point 2 ベクトルの加法・減法

零ベクトル……始点と終点が一致したベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ を**零ベクトル**といい，$\vec{\mathbf{0}}$ で表す。
大きさは 0 で，向きは考えない。

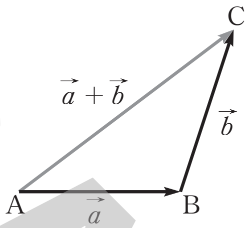
逆ベクトル……ベクトル $\vec{a}$ と大きさが等しく，向きが反対のベクトルを**逆ベクトル**といい，$-\vec{a}$ で表す。
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のとき，$-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathbf{BA}}=-\overrightarrow{\mathbf{AB}}$



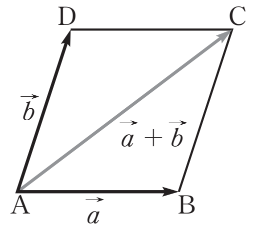
ベクトルの加法……$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とするとき，
$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\vec{a}+\vec{b}$ は，次のように図示できる。

1 三角形をかく。
$\vec{a}$ の終点に $\vec{b}$ の始点を一致させる。
$\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BC}}=\overrightarrow{\mathbf{AC}}$



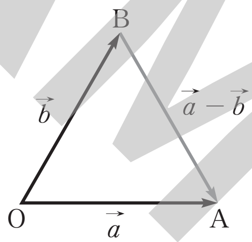
2 平行四辺形をかく。
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



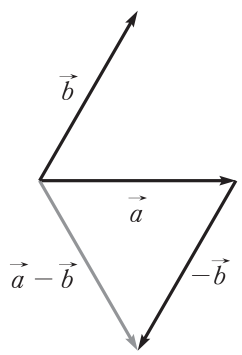
ベクトルの減法……$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，
$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

$\vec{a}-\vec{b}$ は，次のように図示できる。

1 $\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}$
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点を一致させる。
$\overrightarrow{\mathbf{OA}}-\overrightarrow{\mathbf{OB}}=\overrightarrow{\mathbf{BA}}$



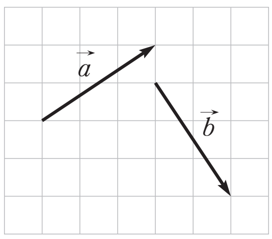
2 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$
逆ベクトルを利用する。



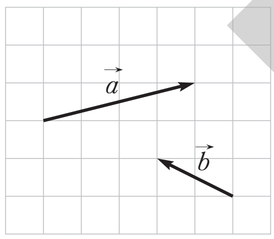
確認問題 2 次の問いに答えよ。

□(1) 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}$ をそれぞれ図示せよ。

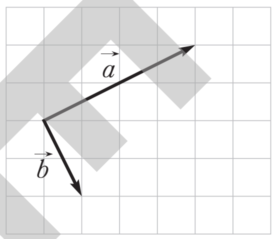
□①



□②



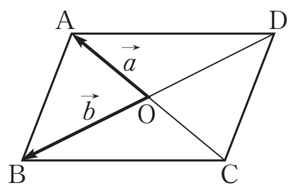
□③



□(2) 4 点 A，B，C，D について，次のベクトルの和や差を 1 つのベクトルで表せ。

□① $\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$　　□② $\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

□(3) 平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。
次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



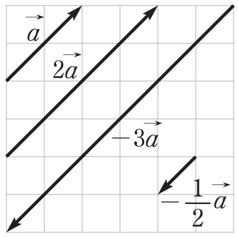
□① $\overrightarrow{\mathrm{CO}}$　　□② $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

□③ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　□④ $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

Point 3 ベクトルの演算

● ベクトルの実数倍

ベクトル $\vec{a}$ の k 倍のベクトル $k\vec{a}$ を次のように定める。



[1] $\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき，

❶ $k>0$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きで，大きさは $|\vec{a}|$ の k 倍

❷ $k<0$ のとき，$\vec{a}$ と反対の向きで，大きさは $|\vec{a}|$ の $|k|$ 倍

❸ $k=0$ のとき，零ベクトル

[2] $\vec{a}=\vec{0}$ のとき，

任意の実数 k に対して，$k\vec{0}=\vec{0}$

● ベクトルの計算……多項式の計算と同じように行う。

〔加法〕

[1] 交換法則　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

[2] 結合法則　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

[3] $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

[4] $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

〔実数倍〕

k，l を実数とするとき，

[1] $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

[2] $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

[3] $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

例 ① $(\vec{a}-3\vec{b})-3(2\vec{a}-\vec{b})+5\vec{a}$

$=\vec{a}-3\vec{b}-6\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{a}$

$=(1-6+5)\vec{a}+(-3+3)\vec{b}$

$=\vec{0}$ ←― **0ではない**

② 等式 $3(\vec{x}-2\vec{a})=\vec{x}-2\vec{a}$ を満たす $\vec{x}$ は，

$3\vec{x}-6\vec{a}=\vec{x}-2\vec{a}$

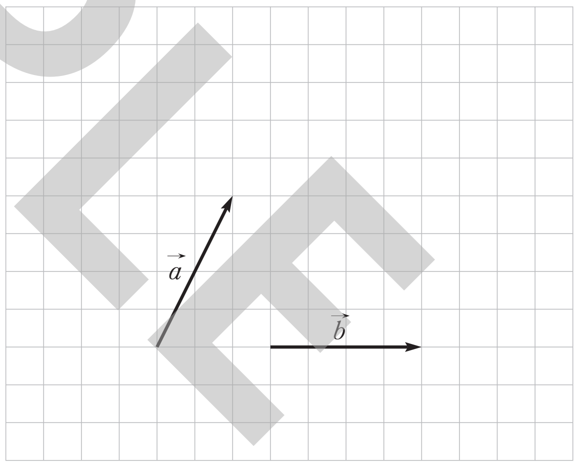
$(3-1)\vec{x}=(6-2)\vec{a}$

$2\vec{x}=4\vec{a}$

$\vec{x}=2\vec{a}$

確認問題 3　次の問いに答えよ。

□(1) 右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のベクトルを図示せよ。



□① $3\vec{a}$

□② $-\frac{1}{2}\vec{b}$

□③ $2\vec{a}+\vec{b}$

□④ $\frac{1}{2}\vec{a}-2\vec{b}$

□(2) 次の式を簡単にせよ。

□① $3\vec{a}+\vec{b}-4\vec{a}+3\vec{b}$　　□② $(\vec{a}-4\vec{b})+(3\vec{a}+2\vec{b})$

□③ $(2\vec{a}-6\vec{b})-2(\vec{a}-4\vec{b})$　　□④ $10\vec{a}-4(3\vec{a}-\vec{b})+2(\vec{a}-2\vec{b})$

□(3) 次の等式を満たすベクトル $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

□① $\vec{x}+7\vec{a}+3\vec{b}=2(\vec{x}-4\vec{b})$　　□② $3(\vec{x}-\vec{a}+2\vec{b})=5(\vec{x}+\vec{b})-4\vec{a}$

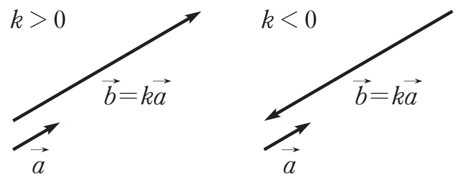
Point ❹ ベクトルの平行・ベクトルの分解

● ベクトルの平行

$\vec{0}$ でない２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は，向きが同じか反対のとき**平行**であるといい，$\boldsymbol{\vec{a}} \,/\!/\, \boldsymbol{\vec{b}}$ と書く。

● ベクトルの平行条件

同じ向きに平行　$k>0$　　反対の向きに平行　$k<0$



実数倍の定義により，次のことが成り立つ。

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき，

$\vec{a} \,/\!/\, \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k がある

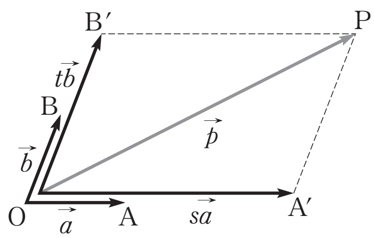
例　①　$|\vec{a}|=1$ のとき，$\vec{a}$ と平行で大きさが２のベクトルは，$2\vec{a}$ と $-2\vec{a}$

②　$|\vec{b}|=3$ のとき，$\vec{b}$ と平行な単位ベクトルは，$\dfrac{1}{3}\vec{b}$ と $-\dfrac{1}{3}\vec{b}$

一般に，$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは，$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ と $-\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ である。

● ベクトルの分解

２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は $\vec{0}$ でなく，また平行でないとする。このとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s，t を用いて，$\boldsymbol{\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}}$ の形にただ１通りに表すことができる。



〔証明〕　右の図のように，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とする。

点Ｐを通り，直線 OB，OA に平行な直線と，直線 OA，OB との交点をそれぞれ A′，B′ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \overrightarrow{\mathrm{OB'}}$　…①

ここで，点 A′ は直線 OA 上に，点 B′ は直線 OB 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 s，t がただ１組ある。

これらを①に代入すると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

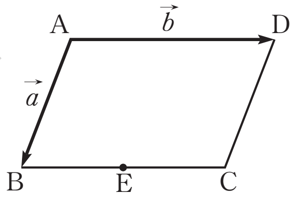
すなわち，$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$　**終**

確認問題４　次の問いに答えよ。

□(1)　$\vec{e}$ を単位ベクトルとするとき，$\vec{e}$ と平行で，大きさが５のベクトルを $\vec{e}$ を用いて表せ。

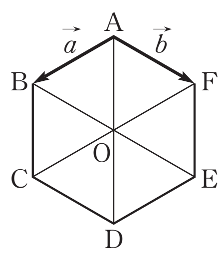
□(2)　$|\vec{a}|=4$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ。

□(3)　平行四辺形 ABCD において，辺 BC の中点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



□①　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　　□②　$\overrightarrow{\mathrm{ED}}$

□(4)　正六角形 ABCDEF において，その中心を O とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



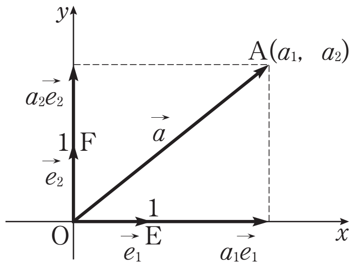
□①　$\overrightarrow{\mathrm{FE}}$　　□②　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　　□③　$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$

Point 5 ベクトルの成分表示

基本ベクトル……O を原点とする座標平面上で，x 軸上に E(1, 0)，y 軸上に F(0, 1) をとり，
$\vec{e_1}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}$，$\vec{e_2}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ とする。この単位ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を**基本ベクトル**という。

$\vec{a}$ の成分表示

ベクトル $\vec{a}$ に対して，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である点 A の座標が $(a_1,\ a_2)$ のとき，
$\vec{a}$ は，$\boldsymbol{\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}}$ の形にただ 1 通りに表される。
この $\vec{a}$ を，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ と書くとき，a_1，a_2 を $\vec{a}$ の**成分**，a_1 を **x 成分**，
a_2 を **y 成分**という。$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ を成分表示という。



$\vec{a}$ の大きさ……$|\vec{a}|=\mathrm{OA}$ であるから，
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき，$\boldsymbol{|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$

ベクトルの相等……2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，
$$\boldsymbol{\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2}$$

成分によるベクトルの演算……成分で表されたベクトルの和，実数倍は次のようになる。

[1] $\boldsymbol{(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)}$

[2] $\boldsymbol{k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)}$ **（k は実数）**

一般に，k，l を実数とするとき，次のことが成り立つ。
$$k(a_1,\ a_2)+l(b_1,\ b_2)=(ka_1+lb_1,\ ka_2+lb_2)$$

例 $\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ 1)$ のとき，
$$2\vec{a}-\vec{b}=2(-1,\ 2)-(3,\ 1)$$
$$=(-2-3,\ 4-1)=(-5,\ 3)$$

（注） $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ のように縦に表記して，次のように計算してもよい。
$$2\vec{a}-\vec{b}=2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-3\\4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$$

確認問題 5 次の問いに答えよ。

□(1) 基本ベクトルを $\vec{e_1}=(1,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1)$ とする。次のベクトルを成分で表せ。

□① $\vec{p}=3\vec{e_1}+4\vec{e_2}$　　□② $\vec{p}=-2\vec{e_1}+5\vec{e_2}$

□(2) 基本ベクトルを $\vec{e_1}=(1,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1)$ とする。次のベクトルを $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を用いて表せ。

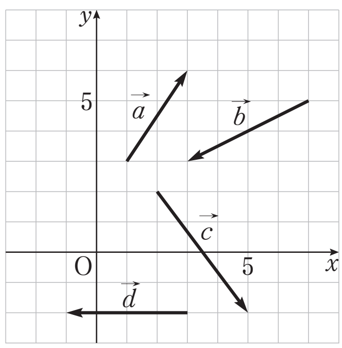
□① $\vec{q}=(4,\ 7)$　　□② $\vec{q}=(-2,\ -5)$

□(3) 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が等しくなるような s，t の値を求めよ。

□① $\vec{a}=(t,\ 2)$，$\vec{b}=(s-1,\ 2t)$

□② $\vec{a}=(3t+1,\ s-5)$，$\vec{b}=(4,\ t+1)$

□(4) 右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を成分で表せ。また，それぞれの大きさを求めよ。



□(5) $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ 1)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。

□① $5\vec{a}$　　□② $-4\vec{b}$　　□③ $\dfrac{2}{3}\vec{b}$

□④ $\vec{a}+2\vec{b}$　　□⑤ $3\vec{a}-\vec{b}$　　□⑥ $5\vec{a}+4\vec{b}$

□(6) $\vec{p}=(3,\ 2)$，$\vec{q}=(4,\ -1)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。

□① $\vec{p}+\vec{q}$　　□② $\vec{p}-\vec{q}$　　□③ $-5\vec{p}$

□④ $\vec{p}-4\vec{q}$　　□⑤ $3\vec{p}+2\vec{q}$　　□⑥ $-4\vec{p}+5\vec{q}$

Point ❻ 成分表示と演算

例 題 $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$ とする。ベクトル $\vec{p}=(7,\ 2)$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解き方 $\vec{p}$ は $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形にただ1通りに表される。
$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおいて，x 成分，y 成分から2つの等式を作る。

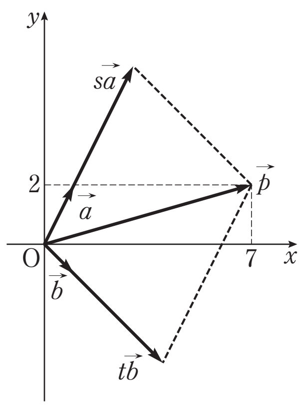
解 答 $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと，

$$(7,\ 2)=s(1,\ 2)+t(1,\ -1)$$
$$(7,\ 2)=(s+t,\ 2s-t)$$

よって，$\begin{cases} 7=s+t \\ 2=2s-t \end{cases}$

これを解いて，$s=3$，$t=4$

したがって，$\vec{p}=3\vec{a}+4\vec{b}$　　**答** $\vec{p}=3\vec{a}+4\vec{b}$



＊**平面上の2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，かつ平行でないとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立であるという。**
このとき，同じ平面上の任意の $\vec{p}$ の $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いた表し方はただ1通りである。

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}\ \text{かつ}\ \vec{p}=s'\vec{a}+t'\vec{b} \iff s=s',\ t=t'$$

特に， $$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0} \iff s=0,\ t=0$$

確認問題 6 次の問いに答えよ。

□(1) $\vec{a}=(1,\ 4)$，$\vec{b}=(-2,\ 2)$ のとき，次の等式を満たすベクトル $\vec{x}$ を成分で表せ。

□① $3\vec{x}-\vec{a}=2\vec{b}$　　□② $\vec{x}+5\vec{a}=2(\vec{x}-\vec{b})$

□(2) $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$，$\vec{c}=(4,\ 9)$ のとき，$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ を満たす s，t の値を求めよ。

□(3) $\vec{a}=(3,\ -2)$，$\vec{b}=(-2,\ 1)$ のとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

□① $\vec{p}=(2,\ -3)$　　□② $\vec{q}=(7,\ -4)$

□(4) $\vec{0}$ でなく，互いに平行でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ がある。次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

□① $(x+1)\vec{a}+(x-y)\vec{b}=3\vec{a}+7\vec{b}$　　□② $(x+2y)\vec{a}+(x+y-2)\vec{b}=\vec{0}$

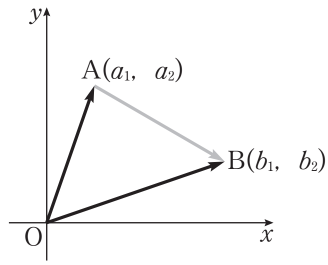
Point 7　点の座標とベクトルの成分

座標とベクトル

2 点 A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$$

$$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$ ←― **2 点 A，B 間の距離**



例　2 点 A(2，1)，B(5，−3) について，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5-2,\ -3-1)=(3,\ -4)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$$

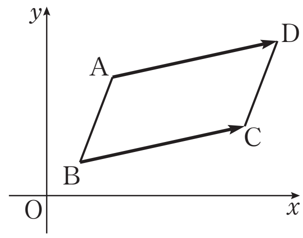
座標平面上の平行四辺形の頂点

四角形 ABCD が平行四辺形であるための必要十分条件は，対辺が平行でかつ等しいことであり，これをベクトルを用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathbf{AD}}=\overrightarrow{\mathbf{BC}}$$

となる。

(注)　$\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ などでもよい。



例 題　**4 点 A(1，2)，B(3，4)，C(4，0)，D を頂点とする平行四辺形 ABCD がある。頂点 D の座標を求めよ。**

解き方　頂点 D の座標を $(x,\ y)$ とおいて，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるような x，y の値を求める。

解 答　頂点 D の座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(x-1,\ y-2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(4-3,\ 0-4)=(1,\ -4)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ だから，$\begin{cases} x-1=1 \\ y-2=-4 \end{cases}$

これを解いて，$x=2$，$y=-2$

よって，頂点 D の座標は，(2，−2)　　**答**　(2，−2)

確認問題 7　次の問いに答えよ。

□(1)　3 点 O(0，0)，A(3，0)，B(−1，2) について，次のベクトルを成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

□①　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　　□②　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　□③　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

□(2)　3 点 A(2，4)，B(3，−5)，C(4，1) について，次のベクトルを成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

□①　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　□②　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　　□③　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

□(3)　4 点 A(3，1)，B$(s,\ 4)$，C$(2,\ t)$，D(−3，0) において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ となるとき，s，t の値を求めよ。

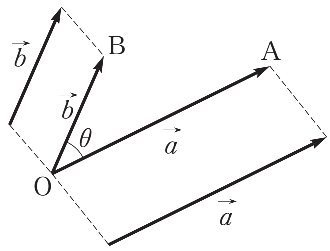
□(4)　4 点 A，B，C，D を頂点とする平行四辺形 ABCD がある。3 つの頂点の座標がそれぞれ次のとき，残りの頂点の座標を求めよ。

□①　A(0，1)，B(3，2)，C(1，4)　　□②　B(−2，1)，C(0，5)，D(3，−4)

□(5)　3 点 A(2，2)，B(5，0)，C(6，3) に対して，これらの点を 3 つの頂点とする平行四辺形の残りの頂点 D の座標を，すべて求めよ。

Point 8 ベクトルの内積

● ベクトルのなす角…… $\vec{0}$ でない 2 つのベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ とする。
1 点 O を定め，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 A，B をとる。このとき，半直線 OA，OB のなす角 θ のうち，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるものを，ベクトル $\boldsymbol{\vec{a}}$，$\boldsymbol{\vec{b}}$ **のなす角**という。



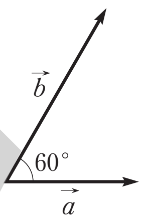
● ベクトルの内積…… $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とする。
このとき，積 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積**といい，記号 $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}$ で表す。

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta} \quad （ただし，\theta は \vec{a} と \vec{b} のなす角）$$

$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める。

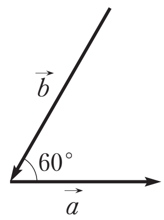
例 ① 右の図で，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角は 60° であるから，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$$
$$=2\times 3\times\frac{1}{2}=3$$



② 右の図で，$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=5$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角は 120° であるから，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ$$
$$=4\times 5\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-10$$



確認問題 8 次の問いに答えよ。

□(1) $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$ とし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の各場合について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

□① $\theta=30^\circ$　　□② $\theta=135^\circ$　　□③ $\theta=180^\circ$

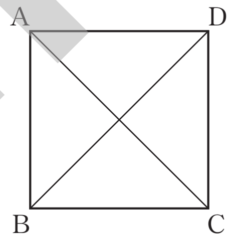
□(2) $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=2$ とし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の各場合について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

□① $\theta=45^\circ$　　□② $\theta=90^\circ$　　□③ $\theta=120^\circ$

□(3) 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD において，次の内積を求めよ。

□① $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　□② $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}$

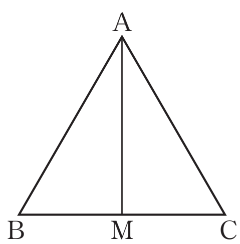
□③ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$　　□④ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}$



□(4) 1 辺の長さが 2 である正三角形 ABC において，辺 BC の中点を M とする。このとき，次の内積を求めよ。

□① $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}$　　□② $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

□③ $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　　□④ $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}}$



Point 9　内積と成分

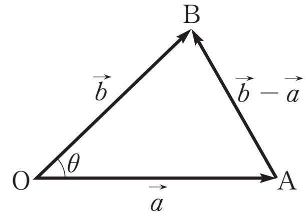
成分による内積の表示

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$のとき，

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$$

〔証明〕 $\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$に対して，1点Oを定めて，

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$とする。



$0^\circ<\theta<180^\circ$のとき，△OABに余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos\theta \quad \cdots\cdots ①$$

①は，$\theta=0^\circ$，180°のときも成り立つ。

$$\mathrm{AB}=|\vec{b}-\vec{a}|,\ \mathrm{OA}=|\vec{a}|,\ \mathrm{OB}=|\vec{b}|$$

$$\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

であるから，①は次のように表される。

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

よって，$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=(a_1{}^2+a_2{}^2)+(b_1{}^2+b_2{}^2)-2(\vec{a}\cdot\vec{b})$

ゆえに，　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

この式は，$\vec{a}=\vec{0}$または$\vec{b}=\vec{0}$のときも，明らかに成り立つ。　終

ベクトルのなす角の余弦

$\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$のなす角をθとすると，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$だから，次が成り立つ。

$$\boldsymbol{\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}} \quad （ただし，0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ）$$

例 $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$のなす角θ

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-1)+2\times3=5$$

また，　$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

だから，$\cos\theta=\dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$だから，$\theta=45^\circ$

確認問題 9　次の問いに答えよ。

□(1)　次のベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$の内積を求めよ。

□①　$\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 5)$　　□②　$\vec{a}=(-5,\ 4)$，$\vec{b}=(-2,\ 3)$

□③　$\vec{a}=(4,\ -6)$，$\vec{b}=(3,\ 2)$　　□④　$\vec{a}=(\sqrt{5},\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ \sqrt{5})$

□(2)　次の条件を満たす$\vec{a}$，$\vec{b}$のなす角θを求めよ。

□①　$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$　　□②　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$

□(3)　次のベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$のなす角θを求めよ。

□①　$\vec{a}=(4,\ 1)$，$\vec{b}=(-5,\ 3)$　　□②　$\vec{a}=(1,\ 0)$，$\vec{b}=(0,\ -5)$

□③　$\vec{a}=(\sqrt{3},\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 3\sqrt{3})$　　□④　$\vec{a}=(1,\ 1)$，$\vec{b}=(1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$

Point 10 平行条件・垂直条件

平行条件……$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，

1 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$ **となる実数** k **がある**

$\iff (b_1,\ b_2)=k(a_1,\ a_2)$ **となる実数** k **がある**

2 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff a_1b_2-a_2b_1=0$

〔証明〕 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ のとき $\theta=0°$ または $180°$ だから，

$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}| \text{ または } \vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$$
$$\iff (\vec{a}\cdot\vec{b})^2-(|\vec{a}||\vec{b}|)^2=0$$
$$\iff (a_1b_1+a_2b_2)^2-(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)=0$$
$$\iff a_1b_2-a_2b_1=0$$

終

垂直条件……$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$
$$\iff a_1b_1+a_2b_2=0$$

例 $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(x,\ 6)$ において，

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ となるとき，$3\times6-2\times x=0$ より，$x=9$

$\vec{a}\perp\vec{b}$ となるとき，$3\times x+2\times6=0$ より，$x=-4$

例題 ベクトル $\vec{a}=(2,\ -1)$ に垂直で，大きさが5のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

解き方 $\vec{b}=(x,\ y)$ として，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と $|\vec{b}|=5$ から x，y の連立方程式を作る。

解答 $\vec{b}=(x,\ y)$ とすると，

$\vec{a}\perp\vec{b}$ より，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times x+(-1)\times y=0$

$y=2x$ …①

また，$|\vec{b}|=5$ より，$|\vec{b}|^2=25$ だから，

$x^2+y^2=25$ …②

①，②より，$x^2+(2x)^2=25$

$x^2=5$

$x=\pm\sqrt{5}$

①より，$x=\sqrt{5}$ のとき，$y=2\sqrt{5}$

$x=-\sqrt{5}$ のとき，$y=-2\sqrt{5}$

よって，$\vec{b}=(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$，$(-\sqrt{5},\ -2\sqrt{5})$

答 $\vec{b}=(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$，$(-\sqrt{5},\ -2\sqrt{5})$

確認問題 10 次の問いに答えよ。

□(1) 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ のうち，平行なベクトルはどれとどれか。また，垂直なベクトルはどれとどれか。

$\vec{a}=(4,\ -6)$，　$\vec{b}=(3,\ 2)$，　$\vec{c}=(-6,\ 9)$

□(2) 2つのベクトル $\vec{a}=(-2,\ x)$，$\vec{b}=(3,\ x+1)$ において，次のときの x の値を求めよ。

□① $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ となるとき　　□② $\vec{a}\perp\vec{b}$ となるとき

□(3) $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(5,\ 6)$，$\vec{c}=(4,\ 5)$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になるように，t の値を定めよ。

□(4) 2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 6)$，$\vec{b}=(x,\ y)$ が垂直で，$|\vec{b}|=\sqrt{10}$ となるとき，x，y の値を求めよ。

□(5) ベクトル $\vec{a}=(3,\ 4)$ がある。

□① $\vec{a}$ に平行な単位ベクトル $\vec{e_1}$ を求めよ。　　□② $\vec{a}$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e_2}$ を求めよ。

Point 11　内積の性質

内積の性質……ベクトルの内積について，次のことが成り立つ。

1　$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$　　2　$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$　　3　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

4　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

5　$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$　（k は実数）

内積の性質を利用すると，ベクトルの計算が整式の展開と同じように計算できる。

例　①　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

②　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

例題　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$　　(2)　$|\vec{a}+2\vec{b}|$

解き方　(1)　まず，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$ の両辺を 2 乗して左辺を $|\vec{a}|^2$，$|\vec{b}|^2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を用いた式で表す。

(2)　(1)の結果を使って，$|\vec{a}+2\vec{b}|^2$ の値を求める。

解答　(1)　$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$ の両辺を 2 乗すると，

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=3$

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=3$

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3$

$1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=3$

$5-2\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$　　**答**　1

(2)　$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=1^2+4\times1+4\times2^2$

$=21$

$|\vec{a}+2\vec{b}|\geqq0$ だから，

$|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{21}$　　**答**　$\sqrt{21}$

確認問題 11　次の問いに答えよ。

□(1)　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$ として，次の内積の性質が成り立つことを示せ。

□①　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　　□②　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

□(2)　次の等式を証明せよ。

□①　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$

□②　$|3\vec{a}+2\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

□(3)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ のとき，次の値を求めよ。

□①　$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$　　□②　$|3\vec{a}+\vec{b}|$

□(4)　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ のとき，

□①　$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。　　□②　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

□(5)　$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ のとき，次の値を求めよ。

□①　$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$　　□②　$|2\vec{a}-3\vec{b}|$

Point 12 最大・最小

例題 $\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。

解き方 $|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ を計算すると t の2次式になる。$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq 0$ だから，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ が最小のとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小である。

解答 $\vec{a}+t\vec{b}=(3,\ 1)+t(1,\ 2)$

$=(3+t,\ 1+2t)$

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(3+t)^2+(1+2t)^2$

$=9+6t+t^2+1+4t+4t^2$

$=5t^2+10t+10$

$=5(t+1)^2+5$

> $|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})$
> $=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$
> $|\vec{a}|^2=10$，$|\vec{b}|^2=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ だから，
> $|\vec{a}+t\vec{b}|^2=5t^2+10t+10$
> このように求めてもよい。

よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は，$t=-1$ のとき，最小値5をとる。

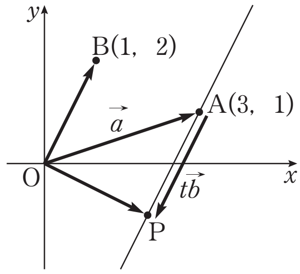
$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq 0$ だから，このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

すなわち，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は，$t=-1$ のとき，最小値 $\sqrt{5}$ をとる。　**答** 最小値 $\sqrt{5}$　$(t=-1)$

別解 点 $(3,\ 1)$ を A，点 $(1,\ 2)$ を B とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+t\vec{b}$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

点 P は，点 A を通り $\vec{b}$ に平行な直線上にあるから，OP が最小になるのは，OP がこの直線と垂直になるときである。



このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\vec{b}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{b}=0$ だから，

$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$，$|\vec{b}|^2=5$ より，　$5+5t=0$

$t=-1$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(3,\ 1)-(1,\ 2)=(2,\ -1)$ だから，

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ は，$t=-1$ のとき，最小値 $\sqrt{5}$ をとる。　**答** 最小値 $\sqrt{5}$　$(t=-1)$

確認問題12　次の問いに答えよ。

□(1)　t を実数とする。$\vec{a}=(t,\ 1)$，$\vec{b}=(t-1,\ 5t)$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

□(2)　t を実数とする。ベクトル $\vec{a}=(t+1,\ t-3)$ において，$|\vec{a}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

□(3)　2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ を満たす。t を実数とするとき，

□①　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ を t の2次式で表せ。

□②　$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

□(4)　次の2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

□①　$\vec{a}=(1,\ 5)$，$\vec{b}=(3,\ 2)$　　□②　$\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(4,\ 2)$

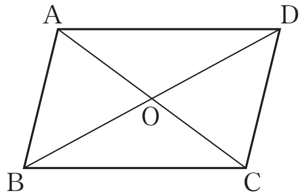
□(5)　$\vec{a}=(1,\ 0)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$ のとき，$\vec{c}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ とする。

□①　$\vec{c}$ を成分で表せ。　　□②　$|\vec{c}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

練成問題 A

1 次の問いに答えよ。 ➡ Point ❶・❷

□(1)　右の図の平行四辺形 ABCD について，次のベクトルと等しいベクトルをあげよ。ただし，対角線の交点を O とする。



□①　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$　　□②　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　　□③　$\overrightarrow{\mathrm{BO}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}$

□(2)　4 点 A，B，C，D について，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

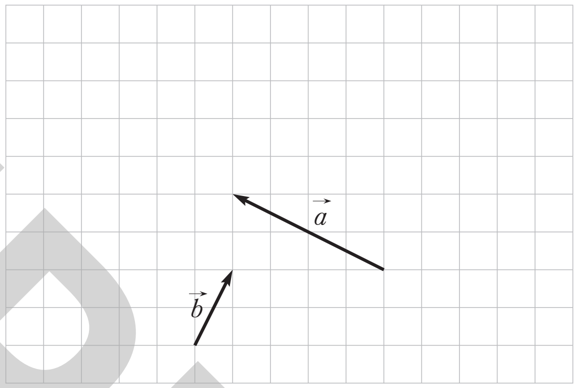
□(3)　四角形 ABCD の対角線の交点を O とする。次の等式が成り立つとき，四角形 ABCD はどのような四角形か。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

2 次の問いに答えよ。 ➡ Point ❸

□(1)　右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のベクトルを図示せよ。

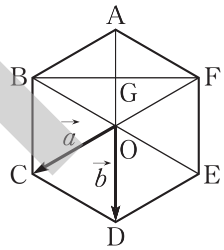
□①　$-\dfrac{3}{2}\vec{a}$　　□②　$2\vec{a}-3\vec{b}$



□(2)　次の等式を満たすベクトル $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$$3(\vec{x}+\vec{a})=2(\vec{x}-\vec{a}+2\vec{b})$$

3 右の図のような O を中心とする正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{b}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。ただし，G は線分 AO と BF の交点である。 ➡ Point ❹



□(1)　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$　　□(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　　□(3)　$\overrightarrow{\mathrm{GD}}$

□(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　□(5)　$\overrightarrow{\mathrm{FB}}$　　□(6)　$\overrightarrow{\mathrm{GE}}$

4 次の問いに答えよ。 ➡ Point ❺・❻

□(1)　$\vec{a}=(1,\ -5)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。

□①　$2\vec{a}$　　□②　$-\vec{a}+2\vec{b}$　　□③　$7\vec{a}-5\vec{b}$

□(2)　$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(4,\ -3)$ のとき，等式 $3\vec{x}-4\vec{a}=2(\vec{x}+\vec{b})$ を満たすベクトル $\vec{x}$ を成分で表せ。

□(3)　$\vec{a}=(3,\ -2)$，$\vec{b}=(4,\ 3)$ のとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

□①　$\vec{p}=(-7,\ -18)$　　□②　$\vec{q}=(0,\ 1)$

5 次の問い に答えよ。　Point ❼

□(1)　3 点 A$(-1,\ 5)$，B$(2,\ 3)$，C$(6,\ -2)$，について，次のベクトルを成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

□①　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　□②　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　□③　$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

□(2)　4 点 A$(1,\ 3)$，B$(3,\ 5)$，C$(4,\ 1)$，D を頂点とする四角形 ABCD が平行四辺形であるとき，頂点 D の座標を求めよ。

6 次の問いに答えよ。　Point ❽・❾

□(1)　$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合に，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

□①　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\theta=45^\circ$　　□②　$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=1$，$\theta=150^\circ$

□(2)　$\triangle$ABC において，$\angle\mathrm{A}=105^\circ$，$\angle\mathrm{B}=30^\circ$，$\mathrm{AB}=6$，$\mathrm{AC}=3\sqrt{2}$ のとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を求めよ。

□(3)　次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積と，そのなす角を求めよ。

□①　$\vec{a}=(3,\ -2)$，$\vec{b}=(5,\ 1)$　　□②　$\vec{a}=(1,\ -\sqrt{3})$，$\vec{b}=(\sqrt{3},\ 3)$

7 次の問いに答えよ。　Point ❿

□(1)　2 つのベクトル $\vec{a}=(x,\ -3)$，$\vec{b}=(-4,\ x-1)$ において，次のときの x の値を求めよ。

□①　$\vec{a}\parallel\vec{b}$ となるとき　　□②　$\vec{a}\perp\vec{b}$ となるとき

□(2)　$\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ のとき，$\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行になるように実数 x の値を定めよ。

□(3)　ベクトル $\vec{a}=(-2,\ 4)$ がある。

□①　$\vec{a}$ に平行な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

□②　$\vec{a}$ に垂直で，大きさが 5 のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

8 次の問いに答えよ。　Point ⓫

□(1)　次の等式を証明せよ。

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$$

□(2)　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ のとき，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$ の値を求めよ。

□(3)　$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{11}$ のとき，$|3\vec{a}-2\vec{b}|$ の値を求めよ。

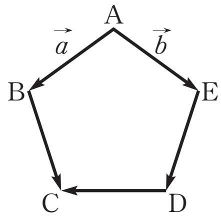
9 次の問いに答えよ。　Point ⓬

□(1)　$\vec{a}=(1,\ t+1)$，$\vec{b}=(3t,\ -t)$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の最大値とそのときの実数 t の値を求めよ。

□(2)　$\vec{a}=(2,\ 4)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。

練成問題 B

1 **正五角形 ABCDE において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{b}$ とおくとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。** （熊本県立大）



□(1)　$\overrightarrow{BC}$　　□(2)　$\overrightarrow{DC}$

□(3)　$\overrightarrow{ED}$

2 **次の問いに答えよ。**

□(1)　互いに平行でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$（ただし，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ とする）があって，これらが $s(\vec{a}+3\vec{b})+t(-2\vec{a}+\vec{b})=-5\vec{a}-\vec{b}$ を満たすとき，s，t の値を求めよ。 （摂南大）

□(2)　平面上の 2 点 A$(2,\ 3)$，B$(-3,\ 2)$ がある。点 C$(-4,\ 7)$ に対して $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ となる x，y を求めよ。 （明治大）

□(3)　2 つのベクトル $\vec{a}=(3,\ -2)$，$\vec{b}=(-6,\ x+1)$ が平行であるとき，x の値を求めよ。 （工学院大）

□(4)　ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 1)$ に対し，ベクトル $t\vec{a}+\vec{b}$ の大きさが 1 となる t の値を求めよ。 （京都産業大）

3 **次の問いに答えよ。**

□(1)　2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-\vec{b}|=3$ を満たすとき，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$ を求めよ。 （東京経済大）

□(2)　2 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 2)$ と $\vec{b}=(x,\ 2)$ のなす角が 60° であるとき，x の値を求めよ。 （神奈川大）

□(3)　平面上に 2 つのベクトル $\vec{a}=(1,\ -9)$，$\vec{b}=(1,\ 1)$ があり，ベクトル $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$（ただし，t は実数）とする。$|\vec{c}|$ が最小になる t の値およびそのときの内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ。 （星薬科大）

□(4)　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}+\vec{b}|=8$，$|\vec{a}-\vec{b}|=6$ を満たし，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が直交しているとき，次の値を求めよ。ただし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。 （関西学院大）

□①　$\vec{a}\cdot\vec{b}$　　□②　$|\vec{a}|$

□③　$|\vec{b}|$　　□④　$\cos\theta$

□(5)　零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{a}+3t\vec{b}$ が垂直であるような実数 t がただ 1 つ存在するとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ（$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$）を求めよ。 （関西大）

4 **次の空欄に当てはまる数を答えよ。** （東京薬科大）

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{a}+\vec{b}|=6$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は $\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\quad}$ である。
そして，$0\leqq t\leqq 1$ のとき，$|t\vec{a}+(1-t)\vec{b}|$ を最小にする t の値は $t_0=\boxed{\quad}$ であり，最大にする t の値は $t_1=\boxed{\quad}$ である。

□

5 **平面上のベクトル $\vec{x}$，$\vec{y}$，$\vec{a}$ が $2\vec{x}+3\vec{y}=\vec{a}$，$\vec{x}\cdot\vec{y}=0$，$|\vec{x}|=|\vec{y}|$，$\vec{a}=(7,\ -4)$ を満たしているとする。次の問いに答えよ。** （岐阜大）

□(1)　$|\vec{x}|$ および $\vec{a}\cdot\vec{x}$ の値を求めよ。

□(2)　$\vec{x}$ および $\vec{y}$ を成分で表せ。

6 **平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が，$|2\vec{a}+\vec{b}|=2$，$|3\vec{a}-5\vec{b}|=1$ を満たしている。$\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{q}=3\vec{a}-5\vec{b}$ とおく。次の問いに答えよ。** （名城大）

□(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ をそれぞれ $\vec{p}$ と $\vec{q}$ を用いて表せ。

□(2)　内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

□(3)　$|\vec{a}+\vec{b}|$ の最大値と最小値を求めよ。

7 **m，n を自然数とする。△OAB が $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{3}\,|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$，$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-m\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-n\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たしているとき，次の問いに答えよ。** （富山大）

□(1)　$\theta=\angle\mathrm{AOB}$ とするとき，m，n および $\cos\theta$ の値を求めよ。

□(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を求めよ。

8 **平面上のベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ に対して，実数 $\vec{a}*\vec{b}$ を $\vec{a}*\vec{b}=a_1b_2-a_2b_1$ で定義する。次の問いに答えよ。** （立教大）

□(1)　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{a}*\vec{b}=0$ ならば，$\vec{b}$ は，ある実数 x があって $\vec{b}=x\vec{a}$ と表されることを示せ。

□(2)　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角度を θ とするとき，$|\vec{a}*\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ が成立することを示せ。

□(3)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5}$ のとき，$|\vec{a}*\vec{b}|$ の値を求めよ。

5 ベクトルのまとめ

学習日　　月　　日

入試問題研究（基本編１）

1 次の問いに答えよ。また，空欄に当てはまる数や式を答えよ。

□(1)　△ABC において，3 辺の長さが AB＝6，AC＝4，BC＝3 ならば，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\square$ である。（日本大）

□(2)　ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 1)$ に対し，ベクトル $t\vec{a}+\vec{b}$ の大きさが 1 となる t の値を求めよ。

（京都産業大）

□(3)　$|\vec{a}|=2|\vec{b}|\neq 0$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるとき，2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は $\square$ である。

（兵庫医科大）

□(4)　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ とする。このとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\square$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\square$ である。

　また実数 t に対して，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は，$t=\square$ のとき最小値 $\square$ をとる。（西南学院大）

□(5)　平面上に 3 点 A(6，7)，B(−1，3)，P(2，k) がある。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の内積を k で表せば，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\square$ であるので，∠APB が直角であるとき，k の値を小さい方から大きい方へ並べると $\square$，$\square$ である。

　また，3 点 A，B，P が一直線上にあるときは $k=\square$ である。（神奈川工科大）

2 次の空欄に当てはまる数を答えよ。

□(1)　平面上に △OAB がある。線分 AB を 2：1 に内分する点を C とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\square\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\square\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

（湘南工科大）

□(2)　△ABC において，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とする。AB：CA＝3：2 ならば，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\square\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\square\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる。

（東邦大）

□(3)　△OAB において，辺 OA を 3：2 に内分する点を P とし，線分 BP を 5：7 に内分する点を Q とする。線分 AQ を延長して辺 OB と交わる点を R とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\square\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。（日本獣医畜産大）

3 台形ABCDにおいて，辺ABと辺DCが平行であり，$\angle A=60°$，$AB=3$，$AD=2$，$DC=1$とする。$\triangle ABC$の重心をP，$\triangle ACD$の重心をQとし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$とするとき，次の問いに答えよ。（福岡大）

□(1) $\overrightarrow{AP}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表し，$|\overrightarrow{AP}|$を求めよ。

□(2) $\triangle APQ$の面積を求めよ。

4 Oを原点とする座標平面上の2点A(2, 0)，B(1, 2)に対して，点Pの位置を$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OB}$によって定める。次の空欄に当てはまるものを答えよ。（東京工科大）

□(1) $\alpha=\dfrac{1}{3}$のとき，点Pは線分ABを$\boxed{}$の比に内分する。また，このとき$|\overrightarrow{OP}|=\boxed{}$である。

□(2) $\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{OP}$が直交するとき，$\overrightarrow{OP}=(\boxed{}, \boxed{})$である。

□(3) 線分OPが$\angle BOA$の二等分線となるとき，$\alpha=\boxed{}$である。

5 $\triangle OAB$において，$OA=1$，$OB=4$，$\angle AOB=120°$とし，点Oから辺ABに下ろした垂線の足をH，辺OBの中点をM，線分OHと線分AMの交点をCとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とおくとき，次の問いに答えよ。（大阪女子大）

□(1) AH：HBを求めよ。

□(2) $\overrightarrow{OC}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$を用いて表せ。

6 $\triangle ABC$において，辺ABを2：1に内分する点をD，辺ACを3：1に内分する点をEとし，線分CD，BEの交点をPとする。（佐賀大）

□(1) $\overrightarrow{AP}$を$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$を用いて表せ。

□(2) $AB=3$，$AC=4$，$AP=\sqrt{7}$のとき，$\angle BAC$の大きさを求めよ。

7 平面上に3点O，A，Bがあり，$\angle AOB=30°$で$OA=2$，$OB=3$とする。sとtが条件$0\leqq s+t\leqq 1$，$0\leqq s$，$0\leqq t$を満たすとき，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{s}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{t}{2}\overrightarrow{OB}$で決まる点Pの描く図形の面積は$\boxed{}$である。
空欄に当てはまる数を答えよ。（神奈川大）

□

8 次の問いに答えよ。また，空欄に当てはまるものを答えよ。

□(1) 2つのベクトル $\vec{a}=(s,\ 3s-1,\ s-1)$，$\vec{b}=(t-1,\ 4,\ t-3)$ が平行であるとき，s，t の値を求めよ。
（大阪工業大）

□(2) A(1, 2, 4)，B(2, 5, 6)，C(x, y, 10) の3点が同一直線上にあるとき，x と y の値を求めよ。
（東京経済大）

□(3) 空間に相異なる4点 A，B，C，D がある。A(1, 0, 0)，B(0, 1, 2) であり，三角形 ABC の重心は G(1, 1, 1) であるとする。次の問いに答えよ。
（立教大）

□① 点 C の座標を求めよ。

□② 4点 A，B，C，D が線分 AC を対角線とする平行四辺形の頂点であるとき，点 D の座標を求めよ。

□③ ②における平行四辺形 ABCD の面積を求めよ。

□(4) xyz 空間に2点 A(1, 2, 2)，B(4, −4, 8) をとる。線分 AB を 2：1 に内分する点を C とすると，点 C の座標は ($\boxed{}$, $-\boxed{}$, $\boxed{}$) である。また O を原点とするとき，$\cos\angle\mathrm{AOC}=\boxed{}$ である。
（青山学院大）

□(5) 原点 O と点 A(−1, 2, 3)，点 B(−2, 4, 2) がある。2点 A，B を通る直線上に点 C があり，$\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$ となるとき，点 C の座標は ($\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$) である。
（共立薬科大）

□(6) 3点 A(1, −2, 3)，B(3, 1, 3)，C(5, 9, 5) で決まる平面を S とする。点 D(0, −1, u) が平面 S 上にあるとき，u の値を求めよ。
さらに，点 E(v, −4, w) を考え，直線 AE が平面 S に対して垂直であるとき，v，w の値を求めよ。
（山口東京理科大）

□(7) 点 $\left(-4,\ -\dfrac{1}{2},\ 5\right)$ を通り，ベクトル (4, 1, −2) に平行な直線を l とする。点 P(2, 3, 3) に最も近い直線 l 上の点を Q とするとき，線分 PQ の長さは $\boxed{}$ であり，点 Q の座標は $\boxed{}$ である。
（福岡大）

□(8) 座標空間の2点 A(4, 5, 2)，B(10, 15, 4) を通る直線が xz 平面および xy 平面と交わる点をそれぞれ P，Q とする。線分 PQ の長さを求めよ。
（防衛医科大）

9 **空間内に 3 点 O(0, 0, 0), A(3, −2, 6), B(−1, 2, −2) がある。次の問いに答えよ。** (図書館情報大)

□(1) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ と同じ向きの単位ベクトル $\overrightarrow{e_A}$, $\overrightarrow{e_B}$ をそれぞれ求めよ。

□(2) 平面 OAB 上で $\angle$AOB の二等分線と直線 AB の交点を P とするとき, $\overrightarrow{OP}$ と同じ向きの単位ベクトル $\overrightarrow{e_P}$ を求めよ。

□(3) 点 O から直線 AB に下ろした垂線の足を H とするとき, $\overrightarrow{OH}$ と同じ向きの単位ベクトル $\overrightarrow{e_H}$ を求めよ。

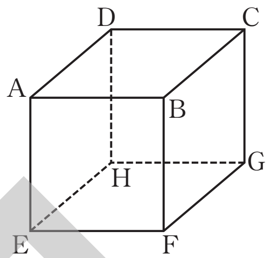
10 **四面体 OPQR について, $\vec{a}=\overrightarrow{OP}$, $\vec{b}=\overrightarrow{QR}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OQ}$, $\vec{d}=\overrightarrow{PR}$ とするとき, 次の問いに答えよ。** (群馬大)

□(1) $\vec{d}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

□(2) 辺 PQ を 2 : 1 に内分する点を A, 辺 OR を 3 : 2 に内分する点を B とするとき, $\overrightarrow{AB}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

□(3) $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2$ が成立するとき, $\vec{b}+\vec{c}$ と $\vec{a}-\vec{c}$ は垂直であることを示せ。

11 **右の図の立方体 ABCD − EFGH の 1 辺の長さは 1 である。線分 AH と線分 ED の交点を P, 線分 DF の中点を R, 線分 AC を 3 : 1 に内分する点を Q, 辺 GC を 2 : 1 に内分する点を S とする。次の問いに答えよ。** (愛媛大)



□(1) $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{RS}$ を $\vec{a}=\overrightarrow{EF}$, $\vec{b}=\overrightarrow{EH}$, $\vec{c}=\overrightarrow{EA}$ を用いて表せ。

□(2) 4 点 C, D, H, G を含む平面上の点 T は $\overrightarrow{FT}\perp\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{FT}\perp\overrightarrow{RS}$ を満たすとする。このとき, 線分 HT の長さを求めよ。

12 **4 点 O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(1, 2, 0), C(2, 1, 3) がある。次の空欄に当てはまる数を答えよ。** (慶應義塾大)

ベクトル $\vec{u}=(u_1,\ u_2,\ 1)$ がベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ に垂直なとき, $u_1=$ $\boxed{}$, $u_2=$ $\boxed{}$ である。
ベクトル $\vec{v}$ をベクトル $\vec{u}$ と同じ向きの単位ベクトルとすると, $\vec{v}=$ $\boxed{}$ $\vec{u}$ である。
点 O から △ABC に引いた垂線 OH の長さを求めると, (OH の長さ) = $\boxed{}$ である。

□

入試問題研究（基本編２）

1 **平面上の３点 O，A，B が $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$ を満たしているとする。**

□(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。また，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ となる。

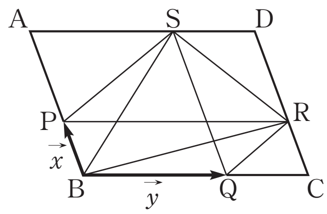
□(2)　三角形 OAB の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。また，O から辺 AB に下ろした垂線の長さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

□(3)　点 P が平面上を $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ を満たしながら動くとき，三角形 PAB の面積 S の最大値を求めよう。

P から AB に下ろした垂線の長さの最大値は $\sqrt{\boxed{\text{サ}}}\left(1+\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{スセ}}}\right)$ であるから，S の最大値は，

$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}+2\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

2 **平行四辺形 ABCD において，辺 AB を $a:1$ に内分する点を P，辺 BC を $b:1$ に内分する点を Q とする。辺 CD 上の点 R および辺 DA 上の点 S をそれぞれ PR // BC，SQ // AB となるようにとり，$\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}$，$\vec{y}=\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ とおく。**



□(1)　五角形 PBQRS の辺 RQ，SP および対角線 SB，RB が表すベクトルは $\vec{x}$，$\vec{y}$ を用いて，

$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=-\vec{x}-\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{y}$，　　$\overrightarrow{\mathrm{SP}}=\boxed{\text{ウエ}}\,\vec{x}-\vec{y}$

$\overrightarrow{\mathrm{SB}}=-(\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{カ}})\vec{x}-\vec{y}$，　　$\overrightarrow{\mathrm{RB}}=-\vec{x}-\left(\boxed{\text{キ}}+\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)\vec{y}$

となる。

□(2)　$\overrightarrow{\mathrm{SP}}\cdot\vec{x}=\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ が成り立つとする。

このとき，$\vec{x}\cdot\vec{y}=-\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}|\vec{x}|^2=-\dfrac{1}{\boxed{\text{シス}}}|\vec{y}|^2$ である。

□(3)　RQ // SB および SP // RB が成り立つとする。

このとき，$a=\dfrac{\boxed{\text{セソ}}+\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$，$b=\dfrac{\boxed{\text{ツ}}+\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

□(4)　(2)と(3)の条件が同時に成り立つとき，$\dfrac{|\vec{y}|}{|\vec{x}|}=\boxed{\text{ナ}}$ であるから，$\cos\angle\mathrm{PBQ}=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}-\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ を得る。

3 **OA $=5$，OC $=4$，$\angle$AOC $=\theta$ である平行四辺形 OABC において，線分 OA を $3:2$ に内分する点を D とする。また，点 A を通り直線 BD に垂直な直線と直線 OC の交点を E とする。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。以下，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおき，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\vec{c}$ と表す。**

(1) t を $\cos\theta$ を用いて表そう。

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t\vec{c}-\vec{a},\qquad \overrightarrow{\mathrm{DB}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\vec{c},\qquad \vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{ウエ}}\cos\theta$$

となるので，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\boxed{\text{オ}}$ により，

$$t=\frac{\boxed{\text{カ}}(\boxed{\text{キ}}\cos\theta+1)}{\boxed{\text{ク}}(\cos\theta+\boxed{\text{ケ}})}\qquad\cdots①$$

となる。

(2) 点 E は線分 OC 上にあるとする。θ のとり得る値の範囲を求めよう。ただし，線分 OC は両端の点 O，C を含むものとする。以下，$r=\cos\theta$ とおく。

点 E が線分 OC 上にあることから，$0\leqq t\leqq 1$ である。

$-1<r<1$ なので，①の右辺の $\cos\theta$ を r に置き換えた分母 $\boxed{\text{ク}}(r+\boxed{\text{ケ}})$ は正である。

したがって，条件 $0\leqq t\leqq 1$ は，

$$0\leqq\boxed{\text{カ}}(\boxed{\text{キ}}r+1)\leqq\boxed{\text{ク}}(r+\boxed{\text{ケ}})\qquad\cdots②$$

となる。

r についての不等式②を解くことにより，θ のとり得る値の範囲は，

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{コ}}}\leqq\theta\leqq\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$$

であることがわかる。

(3) $\cos\theta=-\dfrac{1}{8}$ とする。直線 AE と直線 BD の交点を F とし，三角形 BEF の面積を求めよう。

①により，$t=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\vec{c}$$

となる。

したがって，点 F は線分 AE を $1:\boxed{\text{テ}}$ に内分する。

このことと，平行四辺形 OABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ であることから，

三角形 BEF の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

4 正四面体 OABC において $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。辺 OA を 4 : 3 に内分する点を P，辺 BC を 5 : 3 に内分する点を Q とする。

そのとき，$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\vec{b}+\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\vec{c}$ である。

線分 PQ の中点を R とし，直線 AR が △OBC の定める平面と交わる点を S とする。

そのとき AR : AS = $\boxed{ク}$: $\boxed{ケ}$ である。

また，$\cos\angle AOQ=\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である。

□

5 四面体 OABC において，辺 OA の中点を P，辺 BC の中点を Q，辺 OB の中点を S，辺 CA の中点を T，辺 OC の中点を V，辺 AB の中点を W とする。

□(1) $\overrightarrow{PQ}=-\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\overrightarrow{OB}+\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{OC}$ である。

□(2) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{ST}=-\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}AB^2+\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}OC^2$ である。

□(3) AB = 5，BC = 7，CA = 8，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{ST}=6$，$\overrightarrow{ST}\cdot\overrightarrow{VW}=8$，$\overrightarrow{VW}\cdot\overrightarrow{PQ}=9$ のとき，OC = $\boxed{サ}$，

$\cos\angle AOB=\dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セソ}}$ である。

6 四面体の四つの頂点を，O，L，M，N とする。線分 OL を 2 : 1 に内分する点を P とし，線分 MN の中点を Q とする。a と b を 1 より小さい正の実数とする。線分 ON を $a:(1-a)$ に内分する点を R とし，線分 LM を $b:(1-b)$ に内分する点を S とする。$\vec{l}=\overrightarrow{OL}$，$\vec{m}=\overrightarrow{OM}$，$\vec{n}=\overrightarrow{ON}$ とおく。

□(1) $\overrightarrow{RS}=(\boxed{ア}-\boxed{イ})\vec{l}+\boxed{ウ}\vec{m}-\boxed{エ}\vec{n}$

$\overrightarrow{RP}=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{l}-\boxed{キ}\vec{n}$

$\overrightarrow{RQ}=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\vec{m}+\left(\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}-\boxed{シ}\right)\vec{n}$

が成立する。

□(2) 以下 $\vec{l}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{m}=(0,\ 1,\ 0)$，$\vec{n}=(0,\ 0,\ 1)$ の場合を考える。

点 S が 3 点 P，Q，R の定める平面上にあるとする。このとき，$\overrightarrow{RS}$ は実数 x と y を用いて，$\overrightarrow{RS}=x\overrightarrow{RP}+y\overrightarrow{RQ}$ と表せる。

これより $x=\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}(1-b)$，$y=\boxed{ソ}\,b$ となり，a と b は $\boxed{タチ}+\boxed{ツ}-\boxed{テト}=0$ を満たすことがわかる。

さらに，$\overrightarrow{RP}$ と $\overrightarrow{RQ}$ が垂直になるのは $a=\dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$，$b=\dfrac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}$ のときであり，このとき，$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{RS}$ の内積は $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RS}=\dfrac{\boxed{ノハヒ}}{\boxed{フヘ}}$ となる。

7 **空間に異なる4点 O，A，B，C を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるようにとり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。さらに，3点 D，E，F を，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{a}+\vec{c}$ となるようにとり，線分 BD の中点を L，線分 CE の中点を M とし，線分 AD を 3：1 に内分する点を N とする。**

□(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}\vec{b}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{a}+\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\vec{b}$$

と表される。

□(2) 2直線 FL，MN が交わることを確かめよう。

$0<s<1$ とし，線分 FL を $s:(1-s)$ に内分する点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，s と $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\boxed{\text{エ}}-\frac{s}{\boxed{\text{オ}}}\right)\vec{a}+s\vec{b}+(\boxed{\text{カ}}-s)\vec{c}$$

と表される。

$s=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ となるので，M，N，P は一直線上にある。

よって，2直線 FL，MN は交わることがわかる。

□(3) 2直線 FL，MN の交点を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GF}}$ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}(\boxed{\text{ス}}\,\vec{a}+\boxed{\text{セ}}\,\vec{b}+\vec{c})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GF}}=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}(\vec{a}-\boxed{\text{セ}}\,\vec{b}+\boxed{\text{ソ}}\,\vec{c})$$

と表される。

$|\vec{a}|=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$ とする。

このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{GF}}|=\boxed{\text{タ}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{GM}}|=2$ となる。

次に，直線 OC 上に点 H をとり，実数 t を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\vec{c}$ と表す。

$\overrightarrow{\mathrm{GF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ は，t を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{GF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\boxed{\text{チ}}\,t+\frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}\quad\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=2t+\frac{10}{3}\quad\cdots②$$

と表される。

さらに，$\angle\mathrm{FGH}=\angle\mathrm{MGH}$ とする。このときの t の値を求めよう。

$|\overrightarrow{\mathrm{GF}}|=\boxed{\text{タ}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{GM}}|=2$ と $\angle\mathrm{FGH}=\angle\mathrm{MGH}$ であることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{GF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}\quad\cdots③$$

が成り立つ。

①，②，③から，$t=\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

入試問題研究（応用編）

1 **同一直線上にない3点をO，A，Bとする。Aを通り直線OBに垂直な直線上に点Cをとり，Bを通り直線OAに垂直な直線上に点Dをとる。このとき，ベクトルの内積に関して，次の等式が成り立つことを示せ。**

（茨城大）

□(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$

□(2)　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$

2 **△ABCの3辺の長さをそれぞれ $AB=\sqrt{7}$，$BC=\sqrt{6}$，$CA=\sqrt{5}$ とし，外接円の中心(外心)をOとする。次の空欄に当てはまる数を答えよ。**

（神戸薬科大）

□(1)　$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の内積は $\boxed{}$ である。

□(2)　$\overrightarrow{AB}$ と $2\overrightarrow{AO}$ の内積は $\boxed{}$ である。

□(3)　$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を使って $\overrightarrow{AO}$ を表すと，$\overrightarrow{AO}=\boxed{}\,\overrightarrow{AB}+\boxed{}\,\overrightarrow{AC}$ である。

3 **平面上の2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ とする。次の空欄に当てはまる数を答えよ。**

（会津大）

□(1)　$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{p}$ は，$\vec{p}=\boxed{}\,\vec{a}+\boxed{}\,\vec{b}$ と表される。

□(2)　$\vec{a}$ に垂直で，$\vec{b}$ との内積が正となる単位ベクトル $\vec{q}$ は，$\vec{q}=\boxed{}\,\vec{a}+\boxed{}\,\vec{b}$ と表される。

□(3)　単位ベクトル $\vec{r}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\vec{a}$ が2等分するとき，$\vec{r}=\boxed{}\,\vec{a}+\boxed{}\,\vec{b}$ と表される。

4 **四辺形OABCにおいて $OA=1$，$AB=BC=2$，$OC=3$，$\angle COA=90^\circ$ であるとする。次の問いに答えよ。**

（広島工業大）

□(1)　ベクトル $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ の大きさ，および $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ の内積を求めよ。

□(2)　$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ。

□(3)　四辺形OABCの面積を求めよ。

5 **△ABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=4$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=5$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=6$ である。辺 AC 上の点 D は BD ⊥ AC を満たし，辺 AB 上の点 E は CE ⊥ AB を満たす。CE と BD の交点を H とする。次の問いに答えよ。** （一橋大）

□(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 r を求めよ。

□(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s，t を求めよ。

6 **AB＝3，BC＝2，CA＝4 である △ABC の内心を P とし，直線 AP と辺 BC の交点を D とする。△ABC の内接円と辺 BC との接点を Q とし，Q を通り直線 AP に垂直な直線と辺 AC の交点を R とする。次の問いに答えよ。** （横浜国立大）

□(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ。

□(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

□(3)　比 AR：RC を求めよ。

7 **∠BAC が鋭角である △ABC において，線分 AB の中点を D，線分 BC の中点を E，線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を F とする。ただし，$0<s<1$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$ とおくとき，次の問いに答えよ。** （大阪教育大）

□(1)　線分 DF と線分 AE が直交するとき，s を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

□(2)　線分 DF と線分 AE の交点 P が線分 AE を 3：2 に内分するとき，s の値を求めよ。

□(3)　(2)のとき，$4\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ となることを示せ。

8 **△ABC の内部の点 P が $3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+4\overrightarrow{\mathrm{PB}}+5\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たしている。AP の延長と辺 BC との交点 D は，BC を $t:(1-t)$ に内分する。ただし，$0<t<1$ とする。次の問いに答えよ。** （豊橋技術科学大）

□(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ および t を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を表せ。

□(2)　点 D が AP の延長上にあることを考慮し，t の値を求めよ。

□(3)　△PAB の面積と △ABC の面積との比を求めよ。

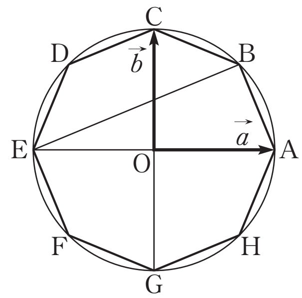
9 **Oを原点として，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 2)$とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とする。実数$s$，$t$が次の条件を満たすとき，点P$(x,\ y)$の存在範囲を図示せよ。** （大阪歯科大）

□(1)　$0\leqq s\leqq 2$，$t=0$

□(2)　$0\leqq s\leqq 2$，$1\leqq t\leqq 2$

□(3)　$s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$s+2t\leqq 2$

10 **半径1の円Oに内接する正八角形ABCDEFGHがある。点Bと点Eを線分で結び，$0<k<1$を満たすkに対して，BEを$(1-k):k$に内分する点をPとする。また，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とする。次の問いに答えよ。** （日本大）



□(1)　$\overrightarrow{\mathrm{GP}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$および$k$を用いて表せ。

□(2)　kを$0<k<1$の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|$が最小となるときの$k$の値を求めよ。

□(3)　点Gと点Pを線分で結ぶとき，GPが三角形BEFの重心を通るときのkの値を求めよ。

11 **平面上の異なる3点O，A，Bは同一直線上にないものとする。この平面上の点Pが**

$$2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。 （岡山大）

□(1)　Pの軌跡が円となることを示せ。

□(2)　(1)の円の中心をCとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$で表せ。

□(3)　Oとの距離が最小となる(1)の円周上の点を$\mathrm{P_0}$とする。A，Bが条件

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+5\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0$$

を満たすとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$となる$s$，$t$の値を求めよ。

12 **定数kを実数とする。座標平面上に4つの定点A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，D$(\vec{d})$がある。$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$とし，$\vec{d}=4\vec{b}$とする。このとき，Cを中心とする円$K$上の任意の点をP$(\vec{p})$とし，$K$はベクトル方程式**

$$(\vec{p}-k\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{p}+3\vec{b})=0$$

で表されるとする。また，Dを通り，$\vec{a}$に平行な直線をlとする。次の問いに答えよ。 （京都府立大）

□(1)　$\vec{c}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，kを用いて表せ。

□(2)　Kの半径が$\sqrt{3}$となるkの値を求めよ。

□(3)　Cからlに下ろした垂線の足をHとする。Hの位置ベクトル$\vec{h}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，kを用いて表せ。

□(4)　lが，Kと共有点をもつとするとき，kのとり得る値の範囲を求めよ。

13 **空間内の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(-2,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(-1,\ -1,\ 2)$ について，次の問いに答えよ。** （日本女子大）

□(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を求めよ。

□(2) 3 点 O，A，B を通る平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ で $\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BOP}$ を満たし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の長さが 1 となるものを求めよ。

14 **四面体 OABC において，**

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=3,\qquad \mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=\sqrt{6}$$

である。また，点 P は辺 AB を $x:(1-x)$ に内分し，点 Q は辺 OC を $y:(1-y)$ に内分する（$0<x<1$，$0<y<1$）。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，次の問いに答えよ。 （新潟大）

□(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

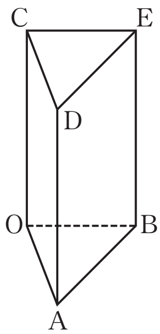
□(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，x，y で表せ。

□(3) 2 点 P，Q の間の距離 PQ の最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

15 **右の図の三角柱 OAB－CDE において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおき，**

$$|\vec{a}|=\sqrt{3},\qquad |\vec{b}|=\sqrt{5},\qquad |\vec{c}|=4$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1,\qquad \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

とする。辺 AD，BE 上にそれぞれ点 P，Q をとり，$\mathrm{AP}=s$，$\mathrm{BQ}=t$ とおく。次の問いに答えよ。 （徳島大）



□(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および s，t を用いて表せ。

□(2) $\mathrm{OP}\perp\mathrm{PQ}$ となるとき，t を s を用いて表せ。

□(3) $\triangle\mathrm{OPQ}$ が $\mathrm{OP}=\mathrm{PQ}$ の直角二等辺三角形となるように，s，t の値を定めよ。

16 **原点 O，点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$，C を頂点とする 1 辺の長さが 1 の正四面体において，辺 AB の中点を M とする。ただし，点 C の z 座標は正とする。次の問いに答えよ。** （成城大）

□(1) $\angle\mathrm{COM}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ。

□(2) 点 C の座標を求めよ。

□(3) この正四面体に外接する球の中心の座標と半径を求めよ。

17 **xyz 空間にある球面 S と xy 平面との交わりが円 $(x-2)^2+(y-1)^2=32$ であり，点 $\mathrm{A}(6,\ 3,\ -2)$ が球面 S 上にある。次の問いに答えよ。** （佛教大）

□(1)　球 S の方程式を求めよ。

□(2)　点 $\mathrm{B}(-6,\ 1,\ 8)$ から球 S の中心までの距離を求めよ。

□(3)　点 B から球面 S へ引いた接線の接点が描く円の半径を求めよ。

□(4)　上の(3)の円の中心の座標を求めよ。

18 **原点を O とし，3 点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 4,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 3)$ をとる。△ABC の重心を G とし，原点 O から 3 点 A，B，C を含む平面に下ろした垂線の足を H とする。次の問いに答えよ。** （宮城大）

□(1)　G の座標を求めよ。

□(2)　H の座標を求めよ。

□(3)　△ABC の面積を求めよ。

19 **空間内に 4 点 A，B，C，D がある。次の問いに答えよ。** （武蔵工業大）

□(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=3$ のとき，△ABC の面積を求めよ。

□(2)　(1)の条件が成り立ち，さらに $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=10$ も成り立つとき，四面体 ABCD の体積を求めよ。

20 **空間の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 3)$，$\mathrm{B}(2,\ 3,\ 1)$，$\mathrm{C}(3,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{D}(1,\ 1,\ 1)$ に対し，2 点 A，B を通る直線を l，2 点 C，D を通る直線を m とする。次の問いに答えよ。** （旭川医科大）

□(1)　l，m のベクトル方程式を求めよ。

□(2)　l と m は交わらないことを示せ。

□(3)　l と m のどちらにも直交する直線を n とするとき，l と n の交点 E の座標および m と n の交点 F の座標を求めよ。

21 点 A(1, 2, 4) を通り，ベクトル $\vec{n}=(-3,\ 1,\ 2)$ に垂直な平面を α とする。平面 α に関して同じ側に 2 点 P$(-2,\ 1,\ 7)$，Q$(1,\ 3,\ 7)$ がある。次の問いに答えよ。 （鳥取大）

□(1) 平面 α に関して点 P と対称な点 R の座標を求めよ。

□(2) 平面 α 上の点で，PS＋QS を最小にする点 S の座標とそのときの最小値を求めよ。

22 空間に，同一直線上にない 3 点 O，A，B と 1 点 P がある。O，A，B を通る平面を α とし，点 P は α 上にはないとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とおき，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，$\vec{p}\cdot\vec{a}=2$，$\vec{p}\cdot\vec{b}=-2$ とする。次の問いに答えよ。 （千葉大）

□(1) $\vec{p}-s\vec{a}-t\vec{b}$ が平面 α に垂直になるように実数 s，t の値を定めよ。

□(2) 平面 α に関して点 P と対称な点を Q とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ を用いて表せ。

□(3) △OPQ の面積が $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき，$\vec{p}$ の大きさ $|\vec{p}|$ を求めよ。

23 座標空間内に，中心軸がベクトル $\vec{l}=(-2,\ -4,\ 5)$ に平行な円柱がある。また，その側面上に 3 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$\left(0,\ 0,\ \dfrac{9}{2}\right)$，B$(-2\sqrt{5},\ 0,\ \sqrt{5})$ があるとする。次の問いに答えよ。 （金沢大）

□(1) O を含み $\vec{l}$ に垂直な平面に A，B それぞれから下ろした垂線の足 A′，B′ の座標を求めよ。また，△OA′B′ は直角三角形であることを示せ。

□(2) この円柱の底面の面積を求めよ。

24 座標空間内において，原点を中心とする半径 1 の球面を S とし，その上に点 N$(0,\ 0,\ 1)$ をとる。球面 S 上の N と異なる点 P$(p,\ q,\ r)$ に対して，直線 NP と xy 平面との交点を Q$(u,\ v,\ 0)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。 （愛知教育大）

□(1) u，v を p，q，r で表せ。

□(2) yz 平面を x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ だけ平行移動して得られる平面を T とする。点 P が球面 S と平面 T との交線の上を動くとき，対応する点 Q が xy 平面上に描く軌跡の方程式を求め，それがどのような図形か述べよ。