

式と証明、図形と方程式

— 目 次 —

1章 式と証明

1 3次式の展開と因数分解	4
□ Q1 基本 3次式の展開	
□ Q2 基本 因数分解の公式	
2 二項定理	8
□ Q1 基本 展開とパスカルの三角形	
□ Q2 基本 二項定理	
3 二項定理の応用	12
□ Q1 重要 二項定理の応用	
□ Q2 重要 $(a + b + c)^n$ の一般項	
4 整式の割り算	16
□ Q1 基本 整式の割り算	
□ Q2 重要 割り算について成り立つ等式	
5 分式の計算①	20
□ Q1 基本 分式の約分	
□ Q2 基本 分式の乗法・除法	
6 分式の計算②	24
□ Q1 基本 分式の加法・減法	
□ Q2 重要 $\frac{(分子)}{(分母)}$ の変形	
7 恒等式	28
□ Q1 基本 恒等式	
□ Q2 重要 分式の恒等式	
8 等式の証明	32
□ Q1 基本 等式の証明	
□ Q2 基本 条件つき等式の証明	
9 比例式	36
□ Q1 基本 比例式	
□ Q2 重要 連比	
10 不等式の証明	40
□ Q1 基本 実数の大小関係の基本性質	
□ Q2 基本 実数の平方の性質	
11 平方完成と不等式の証明	44
□ Q1 基本 平方完成と不等式の証明	
□ Q2 重要 2つの文字を含む2次式の不等式の証明	
12 不等式と平方の大小関係	48
□ Q1 基本 正の数の大小と平方の大小	
□ Q2 基本 実数とその絶対値の大小	
13 相加平均と相乗平均	52
□ Q1 基本 相加平均と相乗平均の大小関係(1)	
□ Q2 重要 相加平均と相乗平均の大小関係(2)	
テスト① 式と証明	56
(1~13のまとめ)	
14 複素数	60
□ Q1 基本 複素数	
□ Q2 基本 複素数の相等	
15 複素数の計算①	64
□ Q1 基本 複素数の和・差・実数倍	
□ Q2 基本 複素数の積	
16 複素数の計算②	68
□ Q1 基本 共役な複素数	
□ Q2 基本 複素数の商	

17 負の数の平方根	72
□ Q1 基本 負の数の平方根	
□ Q2 基本 負の数の平方根の計算	
18 2次方程式の解	76
□ Q1 基本 2次方程式の解の公式	
□ Q2 基本 2次方程式の解の判別	
19 2次方程式の解の判別	80
□ Q1 重要 2次方程式の解の判別(1)	
□ Q2 重要 2次方程式の解の判別(2)	
20 2次方程式の解と係数の関係	84
□ Q1 基本 2次方程式の解と係数の関係	
□ Q2 重要 2次方程式の解の式の値	
21 2次方程式の解と因数分解	88
□ Q1 基本 2次方程式の2つの解に関する問題	
□ Q2 基本 2次式の因数分解	
22 2次方程式の決定	92
□ Q1 基本 2数を解とする2次方程式(1)	
□ Q2 重要 2数を解とする2次方程式(2)	
23 2次方程式の実数解の符号	96
□ Q1 重要 2次方程式の実数解の符号(1)	
□ Q2 重要 2次方程式の実数解の符号(2)	
テスト② 複素数と方程式の解 (14~23のまとめ)	100
24 剰余の定理	104
□ Q1 基本 剰余の定理	
□ Q2 基本 1次式で割った余りからの係数の決定	
25 剰余の定理の応用・因数定理	108
□ Q1 重要 2次式で割った余りを求める問題	
□ Q2 基本 因数定理	
26 高次式の因数分解	112
□ Q1 基本 因数定理を利用した因数分解	
□ Q2 基本 4次式の因数分解	
27 1の3乗根	116
□ Q1 基本 3次式 $x^3 = k$ の解	
□ Q2 重要 1の3乗根	
28 高次方程式	120
□ Q1 基本 4次方程式	
□ Q2 基本 因数定理を利用した高次方程式の解法	
29 3次方程式の解と係数	124
□ Q1 重要 実数解の与えられた3次方程式	
□ Q2 重要 虚数解の与えられた3次方程式	
テスト③ 高次方程式 (24~29のまとめ)	130
テスト④ 式と証明 (1~29のまとめ)	134
チャレンジテスト 式と証明	138

2章 図形と方程式

30 数直線上の点 142	44 軌跡の方程式① 210
□Q1 基本 数直線上の2点間の距離	□Q1 基本 軌跡
□Q2 基本 数直線上の内分点・外分点	□Q2 重要 2点からの距離の比が一定となる点の軌跡
31 座標平面上の2点間の距離 146	45 軌跡の方程式② 214
□Q1 基本 座標平面上の2点間の距離	□Q1 重要 座標が文字で表された点の軌跡
□Q2 重要 距離の条件から点の座標を求める問題	□Q2 重要 点Pにともなって動く点Qの軌跡
32 内分点・外分点 150	46 不等式の表す領域 218
□Q1 基本 内分点・中点	□Q1 基本 不等式 $y > mx + n$ の表す領域
□Q2 基本 外分点	□Q2 基本 不等式 $ax + by + c > 0$ の表す領域
33 点に関して対称な点・三角形の重心 154	47 円を境界とする領域 222
□Q1 基本 点に関して対称な点	□Q1 基本 不等式 $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$ の表す領域
□Q2 基本 三角形の重心	□Q2 基本 不等式 $x^2 + y^2 + lx + my + n < 0$ の表す領域
34 1次方程式の表す图形 158	48 連立不等式の表す領域① 226
□Q1 基本 1次方程式の表す图形	□Q1 基本 連立不等式の表す領域(境界線が2つの直線)
□Q2 基本 座標軸に垂直な直線	□Q2 基本 連立不等式の表す領域(境界線が円と直線)
35 直線の方程式 162	49 連立不等式の表す領域② 230
□Q1 基本 直線の方程式(通る1点と傾き)	□Q1 基本 不等式 $AB > 0$ の表す領域
□Q2 基本 直線の方程式(通る2点)	□Q2 重要 領域と最大・最小
36 2直線の位置関係 166	テスト⑦ 軌跡と領域 236 (44~49のまとめ)
□Q1 基本 平行条件	テスト⑧ 図形と方程式 240 (30~49のまとめ)
□Q2 基本 垂直条件	チャレンジテスト 図形と方程式 244
37 直線の方程式の応用 170	公式集 248
□Q1 重要 2直線の交点の座標	
□Q2 重要 直線に関して対称な点	
38 点と直線の距離 174	
□Q1 基本 原点と直線の距離	
□Q2 基本 点と直線の距離	
39 図形の証明問題への応用 178	
□Q1 重要 線分の長さに関する証明	
□Q2 重要 直線の方程式を利用した図形の証明	
テスト⑤ 点と直線 184 (30~39のまとめ)	
40 円の方程式の基本形 188	
□Q1 基本 円の方程式	
□Q2 基本 円の方程式の求め方	
41 円の方程式の一般形 192	
□Q1 基本 円の方程式の一般形	
□Q2 基本 3点を通る円の方程式	
42 円と直線 196	
□Q1 基本 円と直線の共有点	
□Q2 重要 円と直線の位置関係	
43 円と接線 202	
□Q1 基本 円の接線の方程式	
□Q2 基本 円の外部の点から引いた接線	
テスト⑥ 円 206 (40~43のまとめ)	

式と証明

3次式の展開と因数分解

基本
本

Q1

次の式を展開しなさい。

(1) $(2x+1)^3$

(2) $(x+3)(x^2-3x+9)$

3次式の展開

「3乗」に関連する展開の公式には、次のようなものがある。

展開の公式1 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (和の3乗の展開)

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (差の3乗の展開)

展開の公式2 $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$ (3乗の和になる展開)

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ (3乗の差になる展開)

★ 考え方 ★

(1) 和の3乗の展開で、
 $a=2x, b=1$ である。(2) 異符号 プラス
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $(x+3)(x^2-3x+9)$
 $\downarrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
2乗 2乗 積3乗の和になる展開で、
 $a=x, b=3$ である。

答案

(1) $(2x+1)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 + 1^3$
 $= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 \quad \cdots \cdots \text{答}$

(2) $(x+3)(x^2-3x+9) = (x+3)(x^2-x \cdot 3+3^2)$
 $= x^3 + 3^3$
 $= x^3 + 27 \quad \cdots \cdots \text{答}$

基本
本

Q2

次の式を因数分解しなさい。

(1) x^3+27

(2) x^3-64a^3

因数分解の公式

展開の公式2を逆に利用する因数分解は、次のようにになる。

因数分解の公式 $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ (3乗の和の因数分解)

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ (3乗の差の因数分解)

★ 考え方 ★

(1) 項の数が2つで、 x^3 ,
 $27=3^3$ だから、3乗の和の形。(2) 項の数が2つで、 x^3 ,
 $64a^3=(4a)^3$ だから、3乗の差
の形。

答案

(1) x^3+27
 $= x^3+3^3$
 $= (x+3)(x^2-x \cdot 3+3^2)$
 $= (x+3)(x^2-3x+9) \quad \cdots \cdots \text{答}$

(2) x^3-64a^3
 $= x^3-(4a)^3$
 $= (x-4a)(x^2+x \cdot 4a+(4a)^2)$
 $= (x-4a)(x^2+4ax+16a^2) \quad \cdots \cdots \text{答}$

学習の目標

- ① 3乗に関する展開を、公式を利用してできるようになろう。
 ② 3次式 a^3+b^3 , a^3-b^3 の因数分解をしよう。

Q1 〈3次式の展開〉について、まとめよう。 

まとめ

■ 展開の公式1 $(a+b)^3 =$ (和の3乗の展開)

$(a-b)^3 =$ (差の3乗の展開)

展開の公式2 $(a+b)(a^2-ab+b^2) =$ (3乗の和になる展開)

$(a-b)(a^2+ab+b^2) =$ (3乗の差になる展開)

確認問題

- 次の式を展開しなさい。

□□□(1) $(x-3)^3$

□□□(2) $(x-4)(x^2+4x+16)$

(1) 展開の公式1 (差の3乗の展開) で、 $a =$

, $b =$ である。

$(x-3)^3 =$

(2) 展開の公式2 (3乗の差になる展開) で、 $a =$

, $b =$ である。

$(x-4)(x^2+4x+16) = (x-4)(x^2+x \cdot$ $+ \boxed{}^2)$

$=$ $-$ $=$

Q2 〈因数分解の公式〉について、まとめよう。 

まとめ

■ 因数分解の公式 $a^3+b^3 =$ (3乗の和の因数分解)

$a^3-b^3 =$ (3乗の差の因数分解)

確認問題

- 次の式を因数分解しなさい。

□□□(1) x^3-8

□□□(2) x^3+125y^3

(1) x^3-8

(2) x^3+125y^3

$= x^3 - \boxed{}^3$
 $=$

$= x^3 + (\boxed{})^3$
 $=$

演習問題

1 次の式を展開しなさい。

→ Q1

★ □□□(1) $(x+4)^3$

★ □□□(2) $(2x-1)^3$

□□□(3) $(3x-2)^3$

★ □□□(4) $(x+5)(x^2-5x+25)$

★ □□□(5) $(3x-1)(9x^2+3x+1)$

□□□(6) $(2x-3)(4x^2+6x+9)$

2 次の式を因数分解しなさい。

→ Q2

★ □□□(1) $8a^3+1$

□□□(2) $64x^3-27y^3$

3 $x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}, y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ のとき、次の式の値を求めなさい。

□□□(1) x^2+y^2

□□□(2) x^3+y^3

理解度チェック

★ 次の空欄をうめなさい。

□□□(1) 展開の公式1 $(a+b)^3 =$ (和の3乗の展開)

$(a-b)^3 =$ (差の3乗の展開)

展開の公式2 $(a+b)(a^2-ab+b^2) =$ (3乗の和になる展開)

$(a-b)(a^2+ab+b^2) =$ (3乗の差になる展開)

□□□(2) 因数分解の公式 $a^3+b^3 =$ (3乗の和の因数分解)

$a^3-b^3 =$ (3乗の差の因数分解)

1 次の式を展開しなさい。

□□□(1) $(3x+1)^3$

□□□(2) $(x-5)^3$

□□□(3) $(x+6)(x^2-6x+36)$

□□□(4) $(x-10)(x^2+10x+100)$

2 次の式を因数分解しなさい。

□□□(1) x^3+1

□□□(2) x^3-8a^3

★自分でチェックしてみよう★

●3次式の展開と因数分解

先生メモ

項目	1回目(/)	2回目(/)	3回目(/)	ここに戻る
公式1を使って展開できた	yes / no	yes / no	yes / no	→ Q1
公式2を使って展開できた	yes / no	yes / no	yes / no	→ Q1
公式を使って因数分解できた	yes / no	yes / no	yes / no	→ Q2

2

式と証明
二項定理

基本

Q1

 $(a+b)^3, (a+b)^4, (a+b)^5$ を、それぞれ展開しなさい。

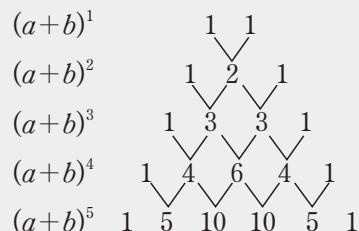
展開とパスカルの三角形

パスカルの三角形

$(a+b)^1, (a+b)^2, (a+b)^3, \dots$ の展開式で、 a について降べきの順に整理したとき、各項の係数だけを取り出して順に並べると、右の図のようになる。この三角形状の数の配列を**パスカルの三角形**といいう。パスカルの三角形は左右対称である。また、次のことがいえる。

- ① 各行の両端の数は 1
- ② 2 行目以降の両端以外の数は、左上と右上の数の和に等しい。

パスカルの三角形



★ 考え方 ★

係数だけを取り出して積を計算するか、パスカルの三角形の利用を考える。

答案

パスカルの三角形より、 $(a+b)^3$ の展開式の係数は、

1, 3, 3, 1 だから、

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \dots \text{答}$$

$(a+b)^4$ の展開式の係数は、1, 4, 6, 4, 1 だから、

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \quad \dots \text{答}$$

$(a+b)^5$ の展開式の係数は、1, 5, 10, 10, 5, 1 だから、

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \quad \dots \text{答}$$

基本

Q2

 $(a+b)^{10}$ の展開式における、 a^7b^3 の係数を求めなさい。

二項定理

$(a+b)^n$ を展開したときの $a^{n-r}b^r$ の項の係数は、 a を $n-r$ 個と b を r 個並べる順列であるから、 ${}_nC_r$ である。

注意
 $a^0=1$
 $b^0=1$

二項定理

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \dots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \dots + {}_nC_nb^n$$

二項定理において、 ${}_nC_ra^{n-r}b^r$ を $(a+b)^n$ の展開式の**一般項**、 ${}_nC_r$ を**二項係数**といいう。

★ 考え方 ★

二項定理より、 $(a+b)^n$ の展開式の $a^{n-r}b^r$ の項の係数は、 ${}_nC_r$ だから、 $n=10, r=3$ の場合を考える。

答案

二項定理より、 $(a+b)^{10}$ を展開するときの a^7b^3 の係数は、

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \quad \dots \text{答}$$

学習の目標

- ① 展開とパスカルの三角形について理解し、展開式が求められるようになろう。
 ② 二項定理について理解し、展開式の項の係数や展開式が求められるようになろう。

Q1 〈展開とパスカルの三角形〉について、まとめよう。 

まとめ

■ ① 各行の両端の数は

② 2行目以降の両端以外の数は、との数のに等しい。

③ 対称である。

確認問題

□□□(1) $(a+b)^6$ を展開しなさい。

□□□(2) $(x+y)^4$ を展開しなさい。

右の図のパスカルの三角形より、

(1) $(a+b)^6$

=

(2) $(x+y)^4$

=

$(a+b)^1$

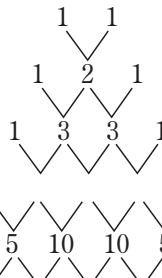
$(a+b)^2$

$(a+b)^3$

$(a+b)^4$

$(a+b)^5$

$(a+b)^6$

Q2 〈二項定理〉について、まとめよう。 

まとめ

■ $(a+b)^n$ の展開式の $a^{n-r}b^r$ の項の係数は、である。

また、次の展開式が成り立つ。これを という。

$(a+b)^n =$

二項定理において、 ${}_nC_r a^{n-r}b^r$ を $(a+b)^n$ の展開式の 、 ${}_nC_r$ を という。

確認問題

□□□ $(a+b)^{10}$ の展開式における、 a^3b^7 の係数を求めなさい。

二項定理より、 $(a+b)^{10}$ を展開するときの a^3b^7 の係数は、

= ${}_{10}C_{10-7} = {}_{10}C_3 =$ =

演習問題

1 パスカルの三角形を用いて、次の式を展開しなさい。

→ Q1

★ □□□(1) $(x+y)^5$

□□□(2) $(a+b)^7$

2 次の問いに答えなさい。

→ Q2

□□□(1) 次の式の展開式における、[] の中の項の係数を求めなさい。

★ □□□① $(a+b)^{10}$ [a^5b^5]

□□□② $(a+b)^8$ [a^2b^6]

★ □□□(2) $(a+b)^6$ を、二項定理を使って展開しなさい。

3 次の式を展開するとき、 x^3 の項の係数を求めなさい。

□□□(1) $(x-2)^6$

□□□(2) $(2x+1)^4$

理解度チェック

★ 次の空欄をうめなさい。

□□□(1) □□□の三角形とは、 $(a+b)^n$ の展開式の各項の□□□を $n=1, 2, \dots$ の順に上から並べて書いてできる□□□対称な三角形状の数の配列のことである。

□□□(2) $(a+b)^n$ の展開式について、次の等式が成り立つ。これを□□□という。

$$(a+b)^n = \boxed{\quad}$$

ここで、 ${}_nC_r$ を□□□、 ${}_nC_r a^{n-r} b^r$ を $(a+b)^n$ の展開式の□□□という。

1 パスカルの三角形を用いて、 $(x+y)^6$ を展開しなさい。

□□□

CAMP

2 次の式の展開式における、[] 内の項の係数を求めなさい。

□□□(1) $(x+y)^7$ $[x^4y^3]$

□□□(2) $(x+y)^{12}$ $[x^3y^9]$

★自分でチェックしてみよう★

●二項定理

項目	1回目(/)	2回目(/)	3回目(/)	ここに戻る
パスカルの三角形について理解し、展開式が求められた	yes / no	yes / no	yes / no	→ Q1
二項定理について理解し、二項係数や一般項が求められた	yes / no	yes / no	yes / no	→ Q2

先生メモ