数学Ⅱ - vol.1

式と証明，図形と方程式

―― 目　次 ――

1章　式と証明

2章　図形と方程式

1 式と証明
3次式の展開と因数分解

基本 Q1

次の式を展開しなさい。

(1)　$(2x+1)^3$　　(2)　$(x+3)(x^2-3x+9)$

3次式の展開

「3乗」に関連する展開の公式には，次のようなものがある。

展開の公式1　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　（和の3乗の展開）

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$　（差の3乗の展開）

展開の公式2　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$　（3乗の和になる展開）

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$　（3乗の差になる展開）

考え方

(1)　和の3乗の展開で，

$a=2x$，$b=1$ である。

(2)　異符号　プラス

$(x+3)(x^2-3x+9)$

積

2乗　2乗

3乗の和になる展開で，

$a=x$，$b=3$ である。

答案

(1)　$(2x+1)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot1+3\cdot2x\cdot1^2+1^3$

$=8x^3+12x^2+6x+1$　……答

(2)　$(x+3)(x^2-3x+9)=(x+3)(x^2-x\cdot3+3^2)$

$=x^3+3^3$

$=x^3+27$　……答

基本 Q2

次の式を因数分解しなさい。

(1)　x^3+27　　(2)　x^3-64a^3

因数分解の公式

展開の公式2を逆に利用する因数分解は，次のようになる。

因数分解の公式　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$　（3乗の和の因数分解）

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$　（3乗の差の因数分解）

考え方

(1)　項の数が2つで，x^3，

$27=3^3$ だから，3乗の和の形。

(2)　項の数が2つで，x^3，

$64a^3=(4a)^3$ だから，3乗の差の形。

答案

(1)　x^3+27

$=x^3+3^3$

$=(x+3)(x^2-x\cdot3+3^2)$

$=(x+3)(x^2-3x+9)$　……答

(2)　x^3-64a^3

$=x^3-(4a)^3$

$=(x-4a)\{x^2+x\cdot4a+(4a)^2\}$

$=(x-4a)(x^2+4ax+16a^2)$

……答

学習日　　月　　日

学習の目標

❶ 3乗に関する展開を，公式を利用してできるようになろう。

❷ 3次式 a^3+b^3，a^3-b^3 の因数分解をしよう。

Q1 〈3次式の展開〉について，まとめよう。

まとめ

■ **展開の公式1**　$(a+b)^3=$ □　（和の 3 乗の展開）

$(a-b)^3=$ □　（差の 3 乗の展開）

展開の公式2　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=$ □　（3 乗の和になる展開）

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=$ □　（3 乗の差になる展開）

確認問題

● 次の式を展開しなさい。

□□□ (1)　$(x-3)^3$　　□□□ (2)　$(x-4)(x^2+4x+16)$

(1)　展開の公式 1（差の 3 乗の展開）で，$a=$ □，$b=$ □ である。

$(x-3)^3=$ □

(2)　展開の公式 2（3 乗の差になる展開）で，$a=$ □，$b=$ □ である。

$(x-4)(x^2+4x+16)=(x-4)(x^2+x\cdot$ □ $+$ □$^2)$

$=$ □$^3-$ □^{3}

$=$ □

Q2 〈因数分解の公式〉について，まとめよう。

まとめ

■ **因数分解の公式**　$a^3+b^3=$ □　（3 乗の和の因数分解）

$a^3-b^3=$ □　（3 乗の差の因数分解）

確認問題

● 次の式を因数分解しなさい。

□□□ (1)　x^3-8　　□□□ (2)　x^3+125y^3

(1)　x^3-8

$=x^3-$ □^{3}

$=$ □

(2)　x^3+125y^3

$=x^3+($ □ $)^3$

$=$ □

演習問題

1 次の式を展開しなさい。 Q1

(1) $(x+4)^3$

(2) $(2x-1)^3$

(3) $(3x-2)^3$

(4) $(x+5)(x^2-5x+25)$

(5) $(3x-1)(9x^2+3x+1)$

(6) $(2x-3)(4x^2+6x+9)$

2 次の式を因数分解しなさい。 Q2

(1) $8a^3+1$

(2) $64x^3-27y^3$

3 $x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) x^2+y^2

(2) x^3+y^3

理解度チェック

★ 次の空欄をうめなさい。

□□□(1) **展開の公式1**　$(a+b)^3=$ $\boxed{\qquad\qquad}$ （和の 3 乗の展開）

$(a-b)^3=$ $\boxed{\qquad\qquad}$ （差の 3 乗の展開）

展開の公式2　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=$ $\boxed{\qquad}$ （3 乗の和になる展開）

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=$ $\boxed{\qquad}$ （3 乗の差になる展開）

□□□(2) **因数分解の公式**　$a^3+b^3=$ $\boxed{\qquad\qquad}$ （3 乗の和の因数分解）

$a^3-b^3=$ $\boxed{\qquad\qquad}$ （3 乗の差の因数分解）

1 次の式を展開しなさい。

□□□(1)　$(3x+1)^3$

□□□(2)　$(x-5)^3$

□□□(3)　$(x+6)(x^2-6x+36)$

□□□(4)　$(x-10)(x^2+10x+100)$

2 次の式を因数分解しなさい。

□□□(1)　x^3+1

□□□(2)　x^3-8a^3

★自分でチェックしてみよう★　●**3次式の展開と因数分解**

項　目	1回目(　／　)	2回目(　／　)	3回目(　／　)	ここに戻る
公式１を使って展開できた	yes / no	yes / no	yes / no	→ Q1
公式２を使って展開できた	yes / no	yes / no	yes / no	→ Q1
公式を使って因数分解できた	yes / no	yes / no	yes / no	→ Q2

先生メモ

式と証明

2 二項定理

基本 Q1

$(a+b)^3$，$(a+b)^4$，$(a+b)^5$ を，それぞれ展開しなさい。

展開とパスカルの三角形

パスカルの三角形

$(a+b)^1$，$(a+b)^2$，$(a+b)^3$，……の展開式で，a について降べきの順に整理したとき，各項の係数だけを取り出して順に並べると，右の図のようになる。この三角形状の数の配列を**パスカルの三角形**という。

パスカルの三角形は左右対称である。また，次のことがいえる。

① 各行の両端の数は 1

② 2 行目以降の両端以外の数は，左上と右上の数の和に等しい。

パスカルの三角形

$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1

考え方

係数だけを取り出して積を計算するか，パスカルの三角形の利用を考える。

答案

パスカルの三角形より，$(a+b)^3$ の展開式の係数は，

1，3，3，1 だから，

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ……答

$(a+b)^4$ の展開式の係数は，1，4，6，4，1 だから，

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ ……答

$(a+b)^5$ の展開式の係数は，1，5，10，10，5，1 だから，

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ ……答

基本 Q2

$(a+b)^{10}$ の展開式における，a^7b^3 の係数を求めなさい。

二項定理

$(a+b)^n$ を展開したときの $a^{n-r}b^r$ の項の係数は，

a を $n-r$ 個と b を r 個並べる順列であるから，

${}_n\mathrm{C}_r$ である。

注意
$a^0=1$
$b^0=1$

二項定理

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

二項定理において，${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$ を $(a+b)^n$ の展開式の**一般項**，${}_n\mathrm{C}_r$ を**二項係数**という。

考え方

二項定理より，$(a+b)^n$ の展開式の $a^{n-r}b^r$ の項の係数は，${}_n\mathrm{C}_r$ だから，$n=10$，$r=3$ の場合を考える。

答案

二項定理より，$(a+b)^{10}$ を展開するときの a^7b^3 の係数は，

${}_{10}\mathrm{C}_3=\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$ ……答

学習の目標

❶ 展開とパスカルの三角形について理解し，展開式が求められるようになろう。
❷ 二項定理について理解し，展開式の項の係数や展開式が求められるようになろう。

Q1 〈展開とパスカルの三角形〉について，まとめよう。

まとめ

■ ① 各行の両端の数は＿＿＿＿

② 2 行目以降の両端以外の数は，＿＿＿＿と＿＿＿＿の数の＿＿＿＿に等しい。

③ ＿＿＿＿対称である。

確認問題

□□□ (1) $(a+b)^6$ を展開しなさい。　　□□□ (2) $(x+y)^4$ を展開しなさい。

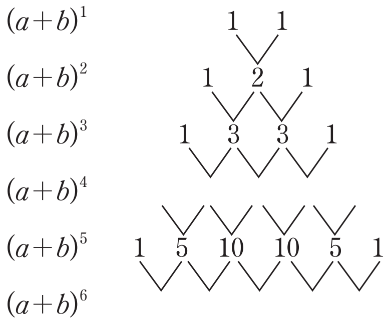
右の図のパスカルの三角形より，

(1) $(a+b)^6$

＝＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) $(x+y)^4$

＝＿＿＿＿＿＿＿＿



Q2 〈二項定理〉について，まとめよう。

まとめ

■ $(a+b)^n$ の展開式の $a^{n-r}b^r$ の項の係数は，＿＿＿＿である。

また，次の展開式が成り立つ。これを＿＿＿＿という。

$(a+b)^n=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

二項定理において，${}_nC_r a^{n-r}b^r$ を $(a+b)^n$ の展開式の＿＿＿＿，${}_nC_r$ を＿＿＿＿という。

確認問題

□□□ $(a+b)^{10}$ の展開式における，a^3b^7 の係数を求めなさい。

二項定理より，$(a+b)^{10}$ を展開するときの a^3b^7 の係数は，

＿＿＿＿$={}_{10}C_{10-7}={}_{10}C_3=$＿＿＿＿$=$＿＿＿＿

演習問題

1 パスカルの三角形を用いて，次の式を展開しなさい。 → Q1

(1) $(x+y)^5$

(2) $(a+b)^7$

2 次の問いに答えなさい。 → Q2

(1) 次の式の展開式における，[　] の中の項の係数を求めなさい。

① $(a+b)^{10}$　$[a^5b^5]$

② $(a+b)^8$　$[a^2b^6]$

(2) $(a+b)^6$ を，二項定理を使って展開しなさい。

3 次の式を展開するとき，x^3 の項の係数を求めなさい。

(1) $(x-2)^6$

(2) $(2x+1)^4$

理解度チェック

★ **次の空欄をうめなさい。**

□□□(1) $\boxed{\qquad}$ の三角形とは，$(a+b)^n$ の展開式の各項の $\boxed{\qquad}$ を $n=1$，2，……の順に上から並べて書いてできる $\boxed{\qquad}$ 対称な三角形状の数の配列のことである。

□□□(2) $(a+b)^n$ の展開式について，次の等式が成り立つ。これを $\boxed{\qquad}$ という。

$(a+b)^n=\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

ここで，${}_n\mathrm{C}_r$ を $\boxed{\qquad}$，${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$ を $(a+b)^n$ の展開式の $\boxed{\qquad}$ という。

1 **パスカルの三角形を用いて，$(x+y)^6$ を展開しなさい。**

□□□

2 **次の式の展開式における，[　] 内の項の係数を求めなさい。**

□□□(1) $(x+y)^7$ [x^4y^3]

□□□(2) $(x+y)^{12}$ [x^3y^9]

★自分でチェックしてみよう★　　●二項定理

項　　目	1回目(　／　)	2回目(　／　)	3回目(　／　)	ここに戻る
パスカルの三角形について理解し，展開式が求められた	yes / no	yes / no	yes / no	→ Q1
二項定理について理解し，二項係数や一般項が求められた	yes / no	yes / no	yes / no	→ Q2

先生メモ