

# 目次

1	3次式の展開・因数分解と二項定理	4
①	乗法公式(1)	② 乗法公式(2)
③	因数分解の公式	④ パスカルの三角形
⑤	二項定理	
⑥	二項定理を使った展開	
⑦	3項以上の式の累乗の展開	
2	多項式の割り算	10
①	多項式の割り算	② 多項式の商と余り(1)
③	多項式の商と余り(2)	
④	複素文字の多項式の割り算	
3	分数式とその計算	14
①	約分	② 乗法・除法
③	通分と加法・減法	
4	複素数	18
①	負の数の平方根	② $a < 0$ のときの $\sqrt{a}$
③	複素数	④ 複素数の相等
5	複素数の計算	22
①	複素数の加法・減法	② 複素数の乗法
③	共役複素数	④ 複素数の除法
⑤	$\sqrt{-a}$ を含む計算	
6	2次方程式と判別式	26
①	2次方程式の解の公式	
②	2次方程式の判別式	
③	判別式の応用	
④	1次の係数が偶数のときの公式	
7	解と係数の関係	30
①	解と係数の関係	
②	解の対称式の値	
③	与えられた解をもつ2次方程式(1)	
④	与えられた解をもつ2次方程式(2)	
8	解と係数の関係の応用	34
①	和と積が与えられた2数	
②	2次方程式の解に関する条件	
③	2次式の因数分解	
④	実数の範囲, 複素数の範囲での因数分解	
9	剰余の定理・因数定理	38
①	割り算の式	② 剰余の定理
③	因数定理	
10	剰余の定理・因数定理の応用	42
①	多項式が割り切れる条件	
②	多項式を2次式で割った余り	
③	因数定理を利用した因数分解	
④	組立除法	
11	高次方程式	46
①	置き換えで解ける高次方程式	
②	因数分解で解ける高次方程式(1)	
③	因数分解で解ける高次方程式(2)	
④	高次方程式の重解	
⑤	1の3乗根	
⑥	与えられた値を解にもつ3次方程式	
⑦	(発展) 3次方程式の解と係数の関係	
12	恒等式	52
①	恒等式	② 恒等式である条件
③	分数式の恒等式	

13	等式の証明	58
①	等式の証明	② 条件付きの等式の証明
③	比例式	④ 連比
14	不等式の証明	62
①	不等式の性質	
②	不等式の証明(1): 2乗数の性質を用いる	
③	不等式の証明(2): 積の利用	
④	不等式の証明(3): 2乗数の性質を用いる	
⑤	相加平均・相乗平均の関係	
⑥	不等式の証明(4): 2乗して証明する	
⑦	絶対値の不等式	
◇	練成問題C(1)	68
15	直線上の点, 平面上の点	70
①	直線上の点の座標と2点間の距離	
②	数直線上の線分の内分・外分	
③	平面上の点の座標と2点間の距離	
④	平面上の線分の内分・外分	
16	座標の応用	76
①	三角形の重心	② 座標を使つての証明
③	平行四辺形への応用	④ 定点に関して対称な点
⑤	2つの定点からの距離	
17	直線の方程式	82
①	直線の方程式(1): 傾きと $y$ 切片	
②	直線の方程式(2): 通る1点と傾き	
③	直線の方程式(3): 異なる2点を通る直線	
④	直線上の点	
18	直線と直線や点との位置関係	86
①	2直線の平行と垂直	② 線分の垂直二等分線
③	2直線の交点	
④	2直線の交点を通る直線群	
⑤	線対称な点	
⑥	直線外の1点から直線に下ろした垂線	
⑦	点と直線の距離	
⑧	三角形への応用	
19	円の方程式	94
①	円の方程式	② 円の方程式の一般形
③	円の決定(1): 直径の両端が与えられた円	
④	円の決定(2): 3点を通る円	
20	円と直線	98
①	円と直線の交点(1): 2点で交わる場合	
②	円と直線の交点(2): 1点で接する場合	
③	円と直線の共有点の個数	
④	円の中心と直線の距離	
⑤	弦の長さ	
⑥	円の接線の公式	
⑦	円周上の1点で引いた円の接線	
⑧	円外の1点から引いた円の接線	
⑨	2円の交点を通る図形の方程式	
21	軌跡と方程式	106
①	2定点から等距離にある点	
②	2定点からの距離の平方の和が一定である点	
③	2定点からの距離の比が一定である点	
④	定点と定円からの距離の比が一定である点	
22	不等式の表す領域	110
①	直線と領域(1)	② 直線と領域(2)
③	円と領域	
④	連立不等式の表す領域(1)	

⑤ 連立不等式の表す領域(2)	
⑥ 放物線と領域	
⑦ 応用(1): 最大値・最小値	
⑧ 応用(2): 命題の図形的解法	
◇練成問題C (2) .....	118
23 一般角(1)と弧度法 .....	120
① “回転の向き”と“一般角”の考え方	
② 弧度法	
③ 扇形の弧の長さや面積	
④ 一般角の三角関数	
⑤ 象限と三角関数の符号	
24 三角関数の相互関係と一般角(2) ..	126
① 三角関数の相互関係	
② 一般角 $(\theta + 2\pi \times n)$ の三角関数	
③ $(-\theta)$ の三角関数	
④ $(\theta + \pi)$ の三角関数	
⑤ $(\theta + \frac{\pi}{2})$ の三角関数	
⑥ 一般の角 $\theta$ に対する三角関数の値	
25 三角関数のグラフ .....	132
① $y = \sin \theta, y = \cos \theta$ のグラフ	
② $y = \tan \theta$ のグラフ	
③ グラフを利用した方程式の解法	
④ グラフを利用した不等式の解法	
⑤ 三角関数を含む式の最大値・最小値	
26 加法定理 .....	138
① 加法定理	② 加法定理の応用
③ 2直線のなす角と加法定理	
27 倍角・半角の公式 .....	142
① 倍角の公式	② 半角の公式
③ 三角関数を含む方程式	
④ 三角関数を含む不等式	
28 三角関数の合成 .....	146
① 三角関数の合成	② 三角関数の合成の応用
③ (発展) 三角関数の積を和や差に変形する公式	
④ (発展) 三角関数の和や差を積に変形する公式	
◇練成問題C (3) .....	150
29 累乗根とその性質 .....	152
① 累乗根と $\sqrt[n]{a}$	② 累乗根の性質(1)
③ 累乗根の性質(2)	
30 指数の拡張 .....	156
① 指数の拡張(1): 指数が整数	
② 指数の拡張(2): 指数が有理数	
31 指数関数とそのグラフ .....	160
① 指数関数 $a^x$ の決め方	② 指数方程式(1)
③ 指数不等式(1)	④ 指数方程式・不等式(2)
32 対数とその性質 .....	164
① 対数の定義	② 対数の値
③ 対数法則	④ 底の変換公式
33 対数関数とそのグラフ .....	168
① 対数関数のグラフ	② 対数方程式(1)
③ 対数不等式(1)	④ 対数方程式・不等式(2)
⑤ 対数関数の最大・最小	
34 常用対数 .....	174
① 常用対数表の使い方: 対数の値	
② 対数を用いた近似値の計算(1)	
③ 対数を用いた近似値の計算(2)	
④ 常用対数の文章題	
◇練成問題C (4) .....	180

35 微分係数と接線 .....	182	
① 平均変化率	② 極限	
③ 微分係数の定義	④ 接線	
36 導関数 .....	186	
① 導関数: 関数の微分		
② $x^n$ の導関数と導関数の公式		
③ 微分の計算		
④ 変数について		
37 接線・関数の値の変化 .....	190	
① 接線の公式		
② 曲線上にない点から引いた接線		
③ 区間		
④ 関数の値の増減		
38 関数の極大・極小とグラフ .....	194	
① 極大値・極小値	② 3次関数のグラフ	
③ 極値による関数の決定		
④ 4次関数のグラフ		
39 関数の最大・最小 .....	200	
① 3次関数の最大・最小		
② 最大・最小の応用		
③ 4次関数の最大・最小		
40 微分の応用 .....	206	
① 3次方程式の実数解の個数		
② 不等式の証明		
③ グラフ外の点から引ける接線の本数		
41 発展 [関数の極限值] .....	212	
① 関数の極限値の性質	② 極限値の計算	
42 不定積分 .....	214	
① 不定積分, 多項式の積分		
② 積分による関数の決定		
③ 接線の傾きと積分		
43 定積分 .....	218	
① 定積分		
② 積分の上端・下端の大小関係		
③ 定積分の公式		
44 微分と積分の関係・定積分の応用 .....	222	
① 微分と積分の関係		
② 不定積分の表示: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ の応用		
③ 定積分を含む関数		
45 面積 (I) .....	226	
① 面積(1)	② 面積(2)	③ 面積(3)
46 面積 (II) .....	232	
① 3次関数のグラフと面積		
② 放物線とその接線で囲まれた部分の面積		
③ 3次関数のグラフと接線で囲まれた部分の面積		
④ 放物線と直線で囲まれた部分の面積		
47 発展 [累乗の微積分の公式とその証明] .....	238	
① $x^n$ の微分の公式の証明		
② $(ax + b)^n$ の微分と積分		
◇練成問題C (5) .....	240	

□付 録

常用対数表・三角関数表 .....	242
-------------------	-----

# 1 3次式の展開・因数分解と二項定理

## ポイント① 乗法公式(1)

$$[1] (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$[2] (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\text{例} (1) (x + 2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 \\ = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$(2) (2x - 1)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (2x) \cdot 1^2 - 1^3 \\ = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

### 確認問題 1 次の式を展開せよ。

(1)  $(x + 3)^3$

(2)  $(x - 1)^3$

(3)  $(3x + 2)^3$

(4)  $(2x - 3)^3$

(5)  $(2x + y)^3$

(6)  $(3x - 2y)^3$

## ポイント② 乗法公式(2)

$$[3] (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$[4] (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$\text{例} (1) (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = (x)^3 + (2y)^3 = x^3 + 8y^3$$

$$(2) (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) = (2x)^3 - 3^3 = 8x^3 - 27$$

### 確認問題 2 次の式を展開せよ。

(1)  $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

(2)  $(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$

(3)  $(4x - 3)(16x^2 + 12x + 9)$

(4)  $(5x - y)(25x^2 + 5xy + y^2)$

## ポイント③ 因数分解の公式

$$[1] a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$[2] a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{例} (1) x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - x \cdot 2 + 2^2) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$(2) 27x^3 - 8 = (3x)^3 - 2^3 = (3x - 2)\{(3x)^2 + (3x) \cdot 2 + 2^2\} = (3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$$

### 確認問題 3 次の式を因数分解せよ。

(1)  $x^3 + 27$

(2)  $x^3 - 8$

(3)  $64x^3 + y^3$

(4)  $27a^3 - b^3$

(5)  $27x^3 + 8y^3$

(6)  $125a^3 - 27b^3$

**ポイント④** パスカルの三角形

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

これらの展開の係数は1, 2, 1および1, 3, 3, 1となる。このような $(a + b)^n$ の展開式の係数を順に並べたものをパスカルの三角形という。

パスカルの三角形では、  
ある行の数字は、すぐ上の  
行の隣り合う2つの数字の  
和になっている。

$$\begin{array}{ccccccc} n = 2 & & & 1 & 2 & 1 & \\ n = 3 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ n = 4 & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ n = 5 & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ n = 6 & & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{array}$$

**例** パスカルの三角形から

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

**確認問題 4** パスカルの三角形を利用して、次の式の展開の計算をせよ。

- (1)  $(x + y)^5$   
□(2)  $(a + b)^4$   
□(3)  $(x + 1)^5$

**ポイント⑤** 二項定理

$(a + b)^n$ の展開は、組合せの数を用いれば、次のように書ける。

$$(a + b)^n = {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_n C_k a^{n-k} b^k + \cdots + {}_n C_{n-1} a b^{n-1} + {}_n C_n b^n$$

**例** (1)  $(a + b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + \cdots + b^{10}$

(2)  $(a + b)^{10}$ の展開式の $a^3b^7$ の項の係数は、

$${}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

**確認問題 5** 次の問に答えよ。

- (1)  $(a + b)^6$ の展開式の $a^4b^2$ の項の係数を求めよ。  
□(2)  $(a + b)^{10}$ の展開式の $a^9b$ の項の係数を求めよ。  
□(3)  $(a + b)^5$ の展開式の $a^3b^2$ の項の係数を求めよ。  
□(4)  $(x + y)^8$ の展開式の $x^4y^4$ の項の係数を求めよ。  
□(5)  $(x + y)^7$ の展開式の $x^3y^4$ の項の係数を求めよ。

**ポイント⑥** 二項定理を使った展開

**例** (1)  $(3x - y)^4 = (3x)^4 + 4 \cdot (3x)^3 \cdot (-y) + 6 \cdot (3x)^2 \cdot (-y)^2 + 4 \cdot 3x \cdot (-y)^3 + (-y)^4$   
 $= 81x^4 - 108x^3y + 54x^2y^2 - 12xy^3 + y^4$

(2)  $(2x + 3y)^5$  の  $x^2y^3$  を含む項は  ${}_5C_3(2x)^2(3y)^3$  だから、この項の係数は  
 ${}_5C_3 \cdot 2^2 \cdot 3^3 = 1080$

(3)  $(5x - 2y)^6$  の  $xy^5$  を含む項は  ${}_6C_1(5x)(-2y)^5$  だから、この項の係数は  
 ${}_6C_1 \cdot 5 \cdot (-2)^5 = -960$

**確認問題 6** 次の問に答えよ。

(1) 二項定理を用いて次の式を展開せよ。

□①  $(2x + 1)^4$

□②  $(x - 2y)^5$

□③  $(3a + b)^4$

□(2)  $(3x + 2y)^9$  の展開式の  $x^2y^7$  を含む項の係数を求めよ。

□(3)  $(4x - 3y)^8$  の展開式の  $x^3y^5$  を含む項の係数を求めよ。

**ポイント⑦** 3項以上の式の累乗の展開

**例題**  $(a + b + c)^6$  の展開式の  $a^2b^2c^2$  の項の係数を求めよ。

**(解答)**  $\{(a + b) + c\}^6 = (a + b)^6 + {}_6C_1(a + b)^5c + {}_6C_2(a + b)^4c^2 + \dots$

と展開される。 $a^2b^2c^2$  はこのうち  ${}_6C_2(a + b)^4c^2$  に含まれるが、

$$(a + b)^4 = a^4 + {}_4C_1a^3b + {}_4C_2a^2b^2 + \dots$$

となるので、求める係数は

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 90$$

**注意** この係数は  $\frac{6!}{2!2!2!}$  と書ける。

一般に、 $(a + b + c)^n$  の展開式の  $a^p b^q c^r$  の項の係数は、

$$\frac{n!}{p!q!r!}$$

であることが知られている (ただし、 $p + q + r = n$  とする)。

**確認問題 7** 次の問に答えよ。

□(1)  $(x + y + z)^4$  の展開式の  $x^2yz$  の項の係数を求めよ。

□(2)  $(a + b + c)^6$  の展開式の  $ab^2c^3$  の項の係数を求めよ。

□(3)  $(a + b + c)^5$  の展開式の  $a^2b^2c$  の項の係数を求めよ。

---

---

## 練成問題 A

---

---

1 次の式を展開せよ。

(⇒ ポイント1)

□(1)  $(x + 4)^3$

□(2)  $(x - 2)^3$

□(3)  $(2x + 3)^3$

□(4)  $(x - 2y)^3$

2 次の式を展開せよ。

(⇒ ポイント2)

□(1)  $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

□(2)  $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

□(3)  $(4x + y)(16x^2 - 4xy + y^2)$

□(4)  $(5x + 2y)(25x^2 - 10xy + 4y^2)$

3 次の式を展開せよ。

(⇒ ポイント2)

□(1)  $(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^6 - x^3y^3 + y^6)$

□(2)  $(a - b)(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$

□(3)  $(x + y)^3 - 3xy(x + y)$

4 次の式を因数分解せよ。

(⇒ ポイント3)

□(1)  $x^3 + 125$

□(2)  $x^3 - 64$

□(3)  $64x^3 + y^3$

□(4)  $64a^3 - b^3$

□(5)  $x^3 - 27$

□(6)  $x^3 - 125$

□(7)  $27a^3 + 64b^3$

□(8)  $8a^3 - 125b^3$

□(9)  $343x^3y^3 + z^3$

8 1 3次式の展開・因数分解と二項定理

5 パスカルの三角形を利用して、次の式の展開の計算をせよ。

(⇒ ポイント4)

□(1)  $(a + b)^6$

□(2)  $(x + y)^4$

□(3)  $(a - 1)^6$

6 次の間に答えよ。

(⇒ ポイント5)

□(1)  $(a + b)^7$  の展開式の  $a^5b^2$  の項の係数を求めよ。

□(2)  $(a + b)^9$  の展開式の  $a^8b$  の項の係数を求めよ。

□(3)  $(a + b)^7$  の展開式の  $a^3b^4$  の項の係数を求めよ。

7 二項定理を用いて、次の式を展開せよ。

(⇒ ポイント6)

□(1)  $(3x + 1)^4$

□(2)  $(2x - y)^4$

□(3)  $(a + 2b)^5$

8 次の間に答えよ。

(⇒ ポイント6)

□(1)  $(2x - y)^5$  の展開式の  $x^2y^3$  の項の係数を求めよ。

□(2)  $(2x - 3y)^6$  の展開式の  $x^4y^2$  の項の係数を求めよ。

9 次の間に答えよ。

(⇒ ポイント7)

□(1)  $(a + b + c)^6$  の展開式の  $a^4bc$  の項の係数を求めよ。

□(2)  $(x + y + z)^7$  の展開式の  $x^3y^2z^2$  の項の係数を求めよ。

□(3)  $(a + b + c)^5$  の展開式の  $ab^3c$  の項の係数を求めよ。

□(4)  $(a + b + c)^7$  の展開式の  $a^4b^2c$  の項の係数を求めよ。

---

---

## 練成問題 B

---

---

1 次の式を因数分解せよ。

□(1)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

□(2)  $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$

2 次の問に答えよ。

□(1)  $(2x + y - z)^4$  の展開式の  $x^2yz$  の項の係数を求めよ。

□(2)  $(3a + 2b + c)^5$  の展開式の  $a^2b^2c$  の項の係数を求めよ。

□(3)  $(x + 2y + 3)^6$  の展開式の  $x^3y^2$  の項の係数を求めよ。

3 □ 次のことを証明せよ。

$(a + b + c)^n$  の展開式の  $a^p b^q c^r$  の項の係数は、 $\frac{n!}{p!q!r!}$  である。ただし、 $p, q, r$  は 0 または正の整数で、 $p + q + r = n$  とする。

4 次の問に答えよ。

□(1)  $(x^2 + x + 1)^5$  の展開式の  $x^5$  の項の係数を求めよ。

□(2)  $(x^2 + x - 1)^6$  の展開式の  $x^3$  の項の係数を求めよ。

□(3)  $(x - 1 + \frac{1}{x})^5$  の展開式の  $x^2$  の項の係数を求めよ。

□(4)  $(x + 1 + \frac{1}{x})^6$  の展開式の定数項を求めよ。

5 次の問に答えよ。

□(1) 二項定理により、 $(x + 1)^n = {}_n C_0 x^n + {}_n C_1 x^{n-1} + \cdots + {}_n C_{n-1} x + {}_n C_n$  である。この両辺に  $x = 1$  を代入することにより、和  ${}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_{n-1} + {}_n C_n$  の値を求めよ。

(2) (1)と同様にして、次の和を求めよ。

□①  ${}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - {}_n C_3 + \cdots + (-1)^n {}_n C_n$

□②  ${}_{2n} C_0 + {}_{2n} C_2 + {}_{2n} C_4 + \cdots + {}_{2n} C_{2n}$

□③  ${}_{2n} C_1 + {}_{2n} C_3 + {}_{2n} C_5 + \cdots + {}_{2n} C_{2n-1}$

## 2 多項式の割り算

### ポイント① 多項式の割り算

多項式の割り算では、各項を降べきの順に整理してから計算する。

例 (1)  $(4x^3 - 5x + 2) \div (2x - 3)$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x + 2 \\ 2x - 3 \overline{) 4x^3 \phantom{- 6x^2} - 5x + 2} \\ \underline{4x^3 - 6x^2} \phantom{+ 2} \\ 6x^2 - 5x \phantom{+ 2} \\ \underline{6x^2 - 9x} \phantom{+ 2} \\ 4x + 2 \\ \underline{4x - 6} \\ 8 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{商 } 2x^2 + 3x + 2 \\ \text{余り } 8 \end{array} \right.$$

例 (2)  $(2x^3 - 5x^2 + 3x + 2) \div (x^2 - 2x - 3)$

$$\begin{array}{r} 2x - 1 \\ x^2 - 2x - 3 \overline{) 2x^3 - 5x^2 + 3x + 2} \\ \underline{2x^3 - 4x^2 - 6x} \phantom{+ 2} \\ -x^2 + 9x + 2 \\ \underline{-x^2 + 2x + 3} \\ 7x - 1 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{商 } 2x - 1 \\ \text{余り } 7x - 1 \end{array} \right.$$

確認問題 1 次の計算をして、商と余りを求めよ。

□(1)  $(x^2 + 2x - 5) \div (x - 2)$

□(2)  $(3x^2 - 4x + 2) \div (3x - 1)$

□(3)  $(2x^3 + 3x^2 - 20x + 4) \div (x - 3)$

□(4)  $(4x^3 + 2x^2 + 3) \div (x + 2)$

□(5)  $(8x^3 - 4x + 6) \div (2x - 1)$

□(6)  $(x^3 - 4x^2 + 3x + 2) \div (x^2 - 2x - 1)$

□(7)  $(-3x^2 + 2x^3 - 2x + 3) \div (2x + x^2 + 2)$

□(8)  $(2x^3 - 5x + 6x^2 - 7) \div (x^2 + 4x + 6)$

### ポイント② 多項式の商と余り(1)

$x$  の多項式  $A$  を  $x$  の多項式  $B$  で割ったときの商を  $Q$ 、余りを  $R$  とすると、

$$A = BQ + R, \quad (R \text{ の次数}) < (B \text{ の次数})$$

例  $x$  の多項式  $A$  を  $x^2 - x - 3$  で割ったときの商が  $x - 2$ 、余りが  $x - 1$  であるとき、

$$\begin{aligned} A &= (x^2 - x - 3)(x - 2) + x - 1 \\ &= x^3 - x^2 - 3x - 2x^2 + 2x + 6 + x - 1 \\ &= x^3 - 3x^2 + 5 \end{aligned}$$

確認問題 2 次の問に答えよ。

□(1)  $x$  の多項式  $A$  を  $x - 2$  で割ると、商が  $2x - 1$ 、余りが  $3$  である。 $A$  を求めよ。

□(2)  $x$  の多項式  $B$  を  $2x^2 - 3x - 1$  で割ると、商が  $3x - 2$ 、余りが  $2x + 4$  である。 $B$  を求めよ。

□(3)  $x$  の多項式  $C$  を  $x^2 - 2x + 3$  で割ると、商が  $-x + 4$ 、余りが  $-2x + 5$  である。 $C$  を求めよ。

□(4)  $y$  の多項式  $D$  を  $y^2 - 3y - 5$  で割ると、商が  $y - 2$ 、余りが  $-y + 4$  である。 $D$  を求めよ。

**ポイント③ 多項式の商と余り(2)**

**例** 多項式  $A = x^3 - x^2 + 7x + 1$  を多項式  $B$  で割ると、商が  $x + 1$ 、余りが  $7x - 1$  である。

$$x^3 - x^2 + 7x + 1 = B(x + 1) + 7x - 1$$

よって

$$B(x + 1) = x^3 - x^2 + 2$$

右の計算より

$$B = x^2 - 2x + 2$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 2 \\ x + 1 \overline{) x^3 - x^2 + 2} \\ \underline{x^3 + x^2} \phantom{+ 2} \\ -2x^2 \phantom{+ 2} \\ \underline{-2x^2 - 2x} \phantom{+ 2} \\ 2x + 2 \\ \underline{2x + 2} \\ 0 \end{array}$$

**確認問題 3** 次の問に答えよ。

- (1) 多項式  $A = 3x^2 - 4x + 4$  を多項式  $B$  で割ると、商が  $x - 1$ 、余りが  $3$  である。 $B$  を求めよ。
- (2) 多項式  $A = 2x^3 - 3x^2 + 7x$  を多項式  $B$  で割ると、商が  $2x - 1$ 、余りが  $3$  である。 $B$  を求めよ。
- (3) 多項式  $A = x^3 - 3x^2 - 2x + 9$  を多項式  $B$  で割ると、商が  $x^2 - 2x - 4$ 、余りが  $5$  である。 $B$  を求めよ。
- (4) 多項式  $A = 4y^3 - 4y^2 + 6y + 5$  を多項式  $B$  で割ると、商が  $2y + 1$ 、余りが  $y + 1$  である。 $B$  を求めよ。

**ポイント④ 複数文字の多項式の割り算**

文字が2種類以上ある多項式についても、1つの文字に着目して割り算を行うことができる。

**例題**  $A = 2x^3 + 5ax^2 - 3a^2x - 25a^3$ 、 $B = x - 2a$  を  $x$  についての多項式とみて、 $A$  を  $B$  で割った商と余りを求めよ。

(解答)

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 9ax + 15a^2 \\ x - 2a \overline{) 2x^3 + 5ax^2 - 3a^2x - 25a^3} \\ \underline{2x^3 - 4ax^2} \phantom{- 25a^3} \\ 9ax^2 - 3a^2x \phantom{- 25a^3} \\ \underline{9ax^2 - 18a^2x} \phantom{- 25a^3} \\ 15a^2x - 25a^3 \\ \underline{15a^2x - 30a^3} \\ 5a^3 \end{array}$$

答 商  $2x^2 + 9ax + 15a^2$ 、余り  $5a^3$

**確認問題 4** 次のそれぞれについて、 $A$  を  $B$  で割った商と余りを求めよ。ただし割り算は ( ) 内の文字について着目して計算せよ。

- (1)  $A = 4x^2 - 6bx + 4b^2$ 、 $B = 2x - b$  ( $x$ )
- (2)  $A = 6x^3 + 3ax^2 + 6a^2x + 8a^3$ 、 $B = 2x - 3a$  ( $x$ )
- (3)  $A = 6x^4 - 5x^3y - 9x^2y^2 + 7xy^3 - 8y^4$ 、 $B = 3x + 2y$  ( $x$ )
- (4)  $A = x^4 + 2x^3y - 3x^2y^2 + 5xy^3 + 7y^4$ 、 $B = x^2 - xy + y^2$  ( $x$ )

---



---

## 練成問題 A

---



---

1 次の計算をして、商と余りを求めよ。

(⇒ ポイント1)

□(1)  $(x^2 - 4x - 20) \div (x + 3)$

□(2)  $(4x^2 - 2x + 7) \div (2x + 1)$

□(3)  $(3x^3 + 2x^2 - 4x - 3) \div (x + 2)$

□(4)  $(5x^3 - 3x^2 + 2) \div (x - 1)$

□(5)  $(9x^3 + 2x + 4) \div (3x - 2)$

□(6)  $(x^3 + 5x^2 - 3x + 4) \div (x^2 + 2x + 4)$

□(7)  $(4x^2 + x^3 + 4 - 5x) \div (3 - 2x + x^2)$

□(8)  $(2x^2 - 3x^3 - 4x - 20) \div (6 - 3x - x^2)$

2 次の問に答えよ。

(⇒ ポイント2)

□(1)  $x$  の多項式  $A$  を  $2x + 1$  で割ると、商が  $3x - 2$ 、余りが  $2$  である。 $A$  を求めよ。

□(2)  $x$  の多項式  $B$  を  $x^2 - 3x + 1$  で割ると、商が  $x - 2$ 、余りが  $-3x + 5$  である。 $B$  を求めよ。

□(3)  $x$  の多項式  $C$  を  $2x^2 - 4x - 1$  で割ると、商が  $-x + 3$ 、余りが  $5x - 1$  である。 $C$  を求めよ。

□(4)  $y$  の多項式  $D$  を  $y^2 - 6y + 7$  で割ると、商が  $y + 3$ 、余りが  $5$  である。 $D$  を求めよ。

3 次の問に答えよ。

(⇒ ポイント3)

□(1) 多項式  $A = x^3 - 4x^2 + 6x - 15$  を多項式  $B$  で割ると、商が  $x - 3$ 、余りが  $-6$  である。 $B$  を求めよ。

□(2) 多項式  $A = 6x^2 - x + 3$  を多項式  $B$  で割ると、商が  $2x + 1$ 、余りが  $5$  である。 $B$  を求めよ。

□(3) 多項式  $A = x^3 + x^2 - 8x + 7$  を多項式  $B$  で割ると、商が  $x^2 + 3x - 2$ 、余りが  $3$  である。 $B$  を求めよ。

□(4) 多項式  $A = 6y^3 + 5y^2 - 21y + 5$  を多項式  $B$  で割ると、商が  $2y^2 + 3y - 5$ 、余りが  $-5$  である。 $B$  を求めよ。

□(5) 多項式  $A = 9a^3 - 12a^2 + 10a - 7$  を多項式  $B$  で割ると、商が  $3a^2 - 2a + 2$ 、余りが  $-3$  である。 $B$  を求めよ。

□(6) 多項式  $A = 2x^3 - 4x^2 + 1$  を多項式  $B$  で割ると、商が  $x - 1$ 、余りが  $x - 2$  である。 $B$  を求めよ。

4 次のそれぞれについて、 $A$  を  $B$  で割った商と余りを求めよ。ただし割り算は ( ) 内の文字について着目して計算せよ。

(⇒ ポイント4)

□(1)  $A = 6x^3 - 2ax^2 + 3a^2x + 6a^3$ ,  $B = x - 2a$  ( $x$ )

□(2)  $A = 4x^4 - 2bx^3 - 2b^2x^2 + 7b^3x - 27b^4$ ,  $B = 2x - b$  ( $x$ )

---

---

## 練成問題 B

---

---

1 次の問に答えよ。

- (1)  $x$  の多項式  $x^3 - 2x^2 + 3x + k$  を  $x - 1$  で割ったときの商と余りを求めよ。
- (2) この(1)の多項式が  $x - 1$  で割り切れるときの  $k$  の値を求めよ。

2 次の問に答えよ。

- (1)  $x$  の多項式  $x^2 + 5x + k$  が  $x + 1$  で割り切れるような  $k$  の値を求めよ。
- (2)  $x$  の多項式  $2x^3 - 2x^2 + 3x + k$  が  $x + 1$  で割り切れるような  $k$  の値を求めよ。
- (3)  $x$  の多項式  $x^3 - kx^2 + 4x - 4$  が  $x - 2$  で割り切れるような  $k$  の値を求めよ。

3 次の問に答えよ。

- (1)  $(a^3 - 2a^2b + 3ab^2 - b^3) \div (a - b)$  において、各式を  $a$  についての多項式とみて計算し、その商と余りを求めよ。
- (2)  $(a^3 - 2a^2b + 3ab^2 - b^3) \div (a - b)$  において、各式を  $b$  についての多項式とみて計算し、その商と余りを求めよ。
- (3)  $(2x^3 - 3x^2y + 5y^3) \div (x + y)$  において、各式を  $x$  についての多項式とみて計算し、その商と余りを求めよ。
- (4)  $(2x^3 - 3x^2y + 5y^3) \div (x + y)$  において、各式を  $y$  についての多項式とみて計算し、その商と余りを求めよ。
- (5)  $(5a^3 - 2ab^2 + b^3) \div (a + b)$  において、各式を  $b$  についての多項式とみて計算し、その商と余りを求めよ。
- (6)  $(5a^3 - 2ab^2 + b^3) \div (a + b)$  において、各式を  $a$  についての多項式とみて計算し、その商と余りを求めよ。
- (7)  $(x^4 - y^4) \div (x + y)$  において、各式を  $y$  についての多項式とみて計算し、その商と余りを求めよ。
- (8)  $(x^4 - y^4) \div (x + y)$  において、各式を  $x$  についての多項式とみて計算し、その商と余りを求めよ。

# 練成問題C (1)

1 次の計算をせよ。

□(1)  $a, b$  は実数で  $\frac{a+i}{3+bi} = 2-3i$  を満たすとき,  $a, b$  の値を求めよ。

□(2)  $a, b$  は実数で  $\frac{14+ai}{b+3i} = 5+2i$  を満たすとき,  $a, b$  の値を求めよ。

2 次の数を簡単にせよ。

□(1)  $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3$

□(2)  $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{100}$

3 次の問に答えよ。

□(1)  $a, b, c$  は実数で,  $a \neq 0$  とする。2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  が虚数解  $x = \alpha$  をもつとき,  $x = \bar{\alpha}$  もこの方程式の解であることを示せ。

□(2) 2次方程式  $x^2 + ax + b = 0$  が解  $x = 2 + 3i$  をもつとき, 実数  $a, b$  の値を求めよ。

4 □ 多項式  $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$  が多項式  $x+1$ , 多項式  $x-1$ , 多項式  $x-2$  でそれぞれ割り切れるとき, 定数  $a, b, c$  の値を求めよ。

5 次の式を因数分解せよ。

□(1)  $x(x+1)(x+2)(x+3) - 24$

□(2)  $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$

6 □ 方程式  $x^3 + 2x^2 + ax + b = 0$  が解  $x = -1, x = 4$  をもつとき, 定数  $a, b$  の値を求めよ。

7 □  $a, b$  は実数の定数とする。方程式  $x^3 + ax^2 + 5x + b = 0$  が解  $x = 2 + 3i$  をもつとき,  $a, b$  の値を求めよ。

8 □ 方程式  $x^3 - x^2 + ax + b = 0$  が解  $x = -1$  を2重解としてもつとき, 定数  $a, b$  の値を求めよ。

9 次の問に答えよ。

□(1)  $x$  の方程式  $(x-1)(x^2+ax+4)=0$  が3つの異なる実数解をもつような実数  $a$  の値の範囲を求めよ。

□(2)  $x$  の方程式  $(x-3)\{x^2+(a+1)x+2a+7\}=0$  が2重解をもち、3重解をもたないような  $a$  の値を求めよ。

10 □ 次の等式が恒等式となるように、定数  $a, b, c$  の値を定めよ。

$$(3x+1)(x^2+ax+b) = 3x^3+cx^2+(3a-c)$$

11 □ 次の等式が恒等式となるように、定数  $a, b, c, d$  の値を定めよ。

$$x^3+x+1 = a(x-1)^3+(bx+1)^2+c(x+1)+d$$

12 □ 次の等式が任意の実数  $x, y$  に対して成り立つように、 $a, b$  の値を定めよ。

$$(x+y)a^2+(x-y)b = 4x+y$$

13  $x=by+cz, y=cz+ax, z=ax+by$  のとき、次の問に答えよ。ただし、 $x=y=z=0$  ではないとする。

□(1)  $(a+1)x=(b+1)y=(c+1)z$  が成り立つことを示せ。

□(2)  $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}$  を簡単にせよ。

14  $a+2b-c=0, 3a+b-2c=0$  のとき、次の値を求めよ。ただし  $abc \neq 0$  とする。

□(1)  $a:b:c$

□(2)  $\frac{a^2+ab-c^2}{a^2+b^2+c^2}$

15 0と異なる実数  $a, b, c$  が  $\frac{b}{a+b} = \frac{a-b+c}{b+c-a} = \frac{a+b+c}{2a+b+2c}$  を満たしているとき、次の問に答えよ。

□(1)  $2b = a+c$  となることを示せ。

□(2)  $a:b:c$  を求めよ。

16 □ 不等式  $a^2+b^2 > (a-1)(b+1)$  が成り立つことを証明せよ。