目　次

1　集合の要素

ここでは有限集合（有限個の要素しか含まない集合）だけを考える。

ポイント1　要素の個数(1)

S を有限集合とするとき，S に含まれる要素の個数を $n(S)$ によって表す。

例　$A = \{x | x$ は 100 以下の自然数で 3 の倍数$\}$

$B = \{x | x$ は 30 以下の素数$\}$

とすると

$A = \{3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 96,\ 99\}$

$B = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29\}$

なので

$n(A) = 33$

$n(B) = 10$

である。

確認問題 1□　次の 4 つの集合 A，B，C，D について，それぞれに含まれる要素の個数を求めよ。

$A = \{x | x$ は 100 以下の自然数で 7 の倍数$\}$

$B = \{x | x$ は 50 以下の自然数で 6 で割って 3 余るもの$\}$

$C = \{x | x$ は 30 以上 50 以下の素数$\}$

$D = \{x | x$ は 10 以上 30 以下の自然数で，2 でも 3 でも割り切れるもの$\}$

ポイント2　要素の個数(2)

A，B を 2 つの集合とする。このとき，次の式が成り立つ。

$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$

したがって，特に $A \cap B = \phi$ のときは

$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}$

となる。

例　$A = \{x | x$ は 50 以下の自然数で 3 の倍数$\}$

$B = \{x | x$ は 50 以下の自然数で 5 の倍数$\}$

とすると

$A \cup B = \{x | x$ は 50 以下の自然数で 3 または 5 の倍数$\}$

$A \cap B = \{x | x$ は 50 以下の自然数で 15 の倍数$\}$

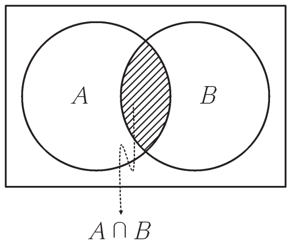
である。

$n(A) = 16,\ n(B) = 10,\ n(A \cap B) = 3$

なので

$n(A \cup B) = 16 + 10 - 3 = 23$

注意　$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ は，集合に含まれる要素を数えるとき最も大切な式である。これが成り立つ理由は，次の図を見れば明らかであろう。



確認問題 2□　$\boldsymbol{A = \{x | x}$ **は 10 から 50 までの整数のうち，4 の倍数}**

$\boldsymbol{B = \{x | x}$ **は 10 から 50 までの整数のうち，6 の倍数}**

とする。このとき

$\boldsymbol{n(A \cap B)}$**，**$\boldsymbol{n(A \cup B)}$

を求めよ。

ポイント3　要素の個数(3)

U をある集合とし，A をその部分集合，U に関する A の補集合を $\overline{A}$ とする。このとき

$\boldsymbol{n(\overline{A}) = n(U) - n(A)}$

が成り立つ。

例　30 以上 70 以下の自然数全体の集合を U とすると，$n(U) = 41$ である。

$A = \{n | n \in U,\ n$ は 8 で割り切れない数$\}$

$B = \{n | n \in U,\ n$ は平方数でない数$\}$

とすると

$\overline{A} = \{n | n \in U,\ n$ は 8 で割り切れる数$\} = \{32,\ 40,\ 48,\ 56,\ 64\}$

$\overline{B} = \{n | n \in U,\ n$ は平方数$\} = \{36,\ 49,\ 64\}$

なので

$$n(A) = n(U) - n(\overline{A}) = 41 - 5 = 36$$

$$n(B) = n(U) - n(\overline{B}) = 41 - 3 = 38$$

注意　ポイント 3 であげた式は，しばしば

$n(A) = n(U) - n(\overline{A})$

の形で使われる。これは直接 $n(A)$ を計算するより，$n(\overline{A})$ を計算するほうがやさしい場合があるからである。

確認問題 3□　$\boldsymbol{U = \{n | n}$ **は 30 以上 60 以下の自然数} とする。**

$\boldsymbol{A = \{n | n \in U,\ n}$ **は素数でない}**

$\boldsymbol{B = \{n | n \in U,\ n}$ **を 8 で割った余りが 1 でない}**

とするとき，$\boldsymbol{n(\overline{A})}$**，**$\boldsymbol{n(\overline{B})}$ **を求めよ。また，**$\boldsymbol{n(A)}$**，**$\boldsymbol{n(B)}$ **を求めよ。**

練成問題　A

1　**整数全体の集合を Z とする。**

$\boldsymbol{A = \{n \mid n \in Z,\ 0 \leqq n \leqq 50,\ n \text{ は 6 の倍数}\}}$

$\boldsymbol{B = \{n \mid n \in Z,\ 0 \leqq n \leqq 40,\ n \text{ は 5 の倍数}\}}$

とする。次の個数を求めよ。　**（⇨ ポイント１，２）**

□(1)　$n(A)$　　□(2)　$n(B)$

□(3)　$n(A \cap B)$　　□(4)　$n(A \cup B)$

2　$\boldsymbol{A = \{n \mid n \in Z,\ 20 \leqq n \leqq 70,\ n \text{ は 5 で割って 2 余る}\}}$

$\boldsymbol{B = \{n \mid n \in Z,\ 30 \leqq n \leqq 60,\ n \text{ は 4 で割って 3 余る}\}}$

とする。次の問に答えよ。　**（⇨ ポイント１，２）**

□(1)　$n(A)$ を求めよ。　　□(2)　$n(B)$ を求めよ。

□(3)　$n(A \cap B)$ を求めよ。　　□(4)　$n(A \cup B)$ を求めよ。

3　$\boldsymbol{U = \{n \mid n \in Z,\ 0 \leqq n \leqq 30\}}$ **とする。U に関する補集合を考える。次の問に答えよ。**　**（⇨ ポイント３）**

□(1)　$A = \{n \mid n \in U,\ n \text{ は偶数}\}$ のとき，$\overline{A}$ と $n(\overline{A})$ を求めよ。

□(2)　$B = \{n \mid n \in U,\ n \text{ は素数でない}\}$ のとき，$\overline{B}$ と $n(\overline{B})$ を求めよ。

□(3)　$C = \{n \mid n \in U,\ n \text{ は 30 と互いに素}\}$ のとき $n(\overline{C})$ を求めよ。

□(4)　$D = \{n \mid n \in U,\ n^2 < 100\}$ のとき $n(\overline{D})$ を求めよ。

4　**１から 100 までの自然数の集合を U とする。U の要素のうち下１桁(けた)が４になっている数の集合を A，U の要素のうち６で割り切れる数の集合を B とする。次の個数を求めよ。**　**（⇨ ポイント２，３）**

□(1)　$n(A)$　　□(2)　$n(A \cap B)$

□(3)　$n(A \cup B)$　　□(4)　$n(\overline{A \cup B})$

練成問題　B

1　Z を整数全体の集合とし，

$A = \{n \mid n \in Z,\ 1 \leqq n \leqq 40,\ n$ は 3 と互いに素$\}$

$B = \{n \mid n \in Z,\ 1 \leqq n \leqq 30,\ n$ は 5 と互いに素$\}$

$C = \{n \mid n \in Z,\ 10 \leqq n \leqq 40,\ n$ は 6 と互いに素$\}$

とする。また

$U = \{n \mid n \in Z,\ 1 \leqq n \leqq 40\}$

とし，U に関する補集合を考える。次の個数を求めよ。

□(1)　$n(B)$　　□(2)　$n(\overline{A})$

□(3)　$n(\overline{A} \cap B)$　　□(4)　$n(C)$

2　町で 100 人の人に聞いたところ，自転車に乗れる人は 76 人，泳げる人は 63 人，両方できる人は 49 人であった。次の問に答えよ。

□(1)　自転車，泳ぎの少なくとも 1 つができる人は何人か。

□(2)　自転車も泳ぎも両方できない人は何人か。

□(3)　自転車か泳ぎのどちらか一方だけができる人は何人か。

3　60 の正の約数の集合を A，75 の正の約数の集合を B とする。次の問に答えよ。

□(1)　A の要素をすべて列挙せよ。

□(2)　$A \cap B$ の要素をすべて列挙せよ。

□(3)　$n(A \cup B)$ を求めよ。

4　40 人のクラスで, パソコンをもっている人は 28 人, ビデオカメラをもっている人は 12 人, どちらももっていない人が 8 人いた。次の問に答えよ。

□(1)　どちらか少なくとも一方をもっている人は何人か。

□(2)　両方とももっている人は何人か。

□(3)　ビデオカメラだけもっていてパソコンをもっていない人は何人か。

2　場合の数

ポイント1　樹形図

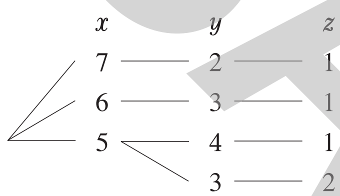
　ある一連のものごとを考えるとき，起こり得るすべての場合を，数えもれも重複もなく列挙することは大切である。この際，よく用いられる方法は“辞書式序列”とよばれる形式で，これは可能性のあるすべての場合をアルファベット順の原則を利用して列挙するものである。このため，次の例のように，枝分かれしていく図でかくとわかりやすい。この表し方のことを**樹形図**という。

例1　10 を 3 つの異なる自然数の和に表す方法は何通りあるか，その個数を求めよう。ただし，加える順序は区別しないことにする。

　3 つの数を大きい順に x，y，z $(x > y > z)$ とする。

　$x + y + z = 10$ であるが，$z \geqq 1$，$y \geqq 2$ なので，$y + z \geqq 3$。したがって，$x \leqq 7$ である。

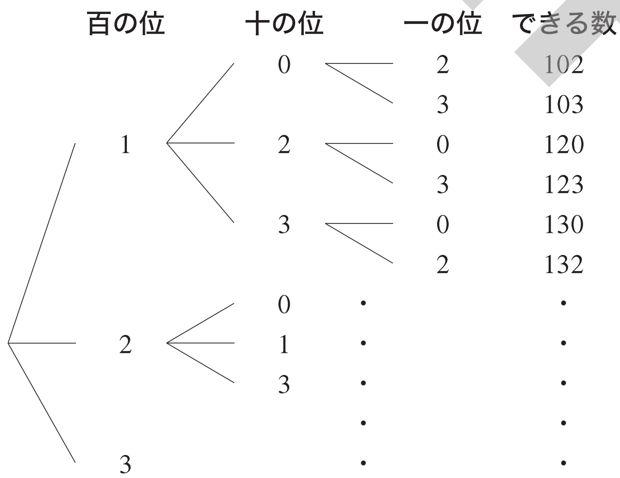
ここで樹形図を利用する。



　よって，4 通りである。

例2　0 から 3 までの 4 つの数の中から 3 つを選んで 3 桁の整数を作る。何通りできるか, その個数を求める。

　樹形図を用いて考えよう。



　初めの百の位には, 0 を使うことはできない(3 桁にならない)。あとは,「使用してしまった数字は使えない」ことに注意すれば図のようになる。数えてみると，合計で 18 個である。

　よって，答は 18 個である。

注意　「場合の数」とは，起こり得るすべての場合を整理・分類することにほかならない。そこで，整理・分類の最も有力な方法である“辞書式序列”が利用されるのである。

確認問題 1　次の問に答えよ。

□(1)　12 を 3 つの異なる自然数の和に表す方法の個数を求めよ。ただし，加える順序は区別しないものとする。

□(2)　0，4，6 の 3 つの数字を使って作れる 3 桁の整数は全部で何個あるか。なお，数字はどれも 1 回しか使えないものとする。

ポイント2　和の法則

２つの事柄Ａ，Ｂがあって，両方が同時に起こることはないとする。Ａの起こり方が m 通り，Ｂの起こり方が n 通りあるなら，ＡまたはＢの一方が起こる場合の数は

$m+n$（通り）

になる。これを「和の法則」という。

事柄が 3 つ以上あっても同様のことが成り立つ。

例１　15 以下の正の 5 の倍数を 3 つの異なる自然数の和に表す方法は何通りあるか，その個数を求めよう。ただし，加える順序は区別しないものとする。

15 以下の正の 5 の倍数は，5，10，15 の 3 つである。このうち，5 を 3 つの異なる自然数の和の形に書くことはできない。したがって和の法則により，「10 を 3 つの異なる自然数の和に書く方法の数」と「15 を 3 つの異なる自然数の和に書く方法の数」を求めて，両方を足せばよい。

前のポイント 1 と同じ方法でこの 2 つを求めると，

10 の場合 ―― 4 通りであった。

15 の場合

x	y	z
12	2	1
11	3	1
10	4	1
	3	2
9	5	1
	4	2
8	6	1
	5	2
	4	3
7	6	2
	5	3
6	5	4

12 通り

よって，求める場合の数は $4+12=16$（通り）である。

例２　2 つの区別できないさいころを同時に投げるとき，出た目の和が 9 または 10 になる場合の数を求めよう。

①　出た目の和が 9 になる場合

6 と 3，5 と 4

②　出た目の和が 10 になる場合

6 と 4，5 と 5

合計 4 通りである。

確認問題 2　次の問に答えよ。

□(1)　6 または 12 を，3 つの異なる自然数の和に表す方法の個数を求めよ。ただし，加える順序は区別しないものとする。

□(2)　2 つの区別できないさいころを同時に投げるとき, 出た目の和が 4 または 5 になる場合の数を求めよ。

□(3)　1 つのさいころを 2 回続けて投げるとする。出た目の和が 4 または 5 になる場合の数を求めよ。

ポイント 3　積の法則

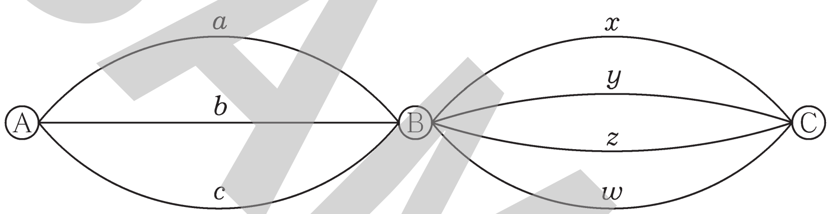
２つの事柄Ａ，Ｂがあって，Ａの起こり方が m 通りあり，そのおのおのの場合にＢの起こる起こり方が n 通りあるとする。このとき，Ａ，Ｂが引き続いて起こる場合の数は

$m \times n$（通り）

である。これを「積の法則」という。

事柄の数が 3 つ以上あっても同様のことが成り立つ。

例 1　Ａ地点からＢ地点に行く方法は 3 通りあり，Ｂ地点からＣ地点に行く方法は 4 通りあるとする。このとき，Ａ地点からＢ地点を経由してＣ地点まで行く方法は何通りあるか，その個数を求めよう。



ＡからＢに a のルートで行ったとすると，その先のＣに行くには x，y，z，w と 4 通り方法がある。これが b，c のルートを通ったときにもそのまま成り立つので，ＡからＣに行く行き方は全部で

$3 \times 4 = 12$（通り）

となる。

例 2　Ａ組には 5 人の女子生徒がおり，Ｂ組には 7 人の女子生徒がいる。Ａ，Ｂ両組から 1 人ずつ女子生徒の代表を選出する方法は全部で何通りあるか求めよう。

Ａ組の 5 人の中からどの 1 人を選ぶかで 5 通りの選び方がある。一方，Ｂ組の 7 人のどの 1 人を代表にするかで 7 通りの方法がある。この 2 つは互いに無関係に行えるので，「積の法則」により可能性の数は両方の積になる。

よって　$7 \times 5 = 35$（通り）

確認問題 3　次の問に答えよ。

□(1)　Ａ市からＢ町に行く方法は 5 通りあり，Ｂ町からＣ市へ行く方法は 3 通りあるとする。Ａ市からＣ市までＢ町を経由して行く行き方は全部で何通りあるか。

□(2)　あるクラスには，15 人の女子生徒と 18 人の男子生徒がいる。この中から男女 1 人ずつ計 2 名の代表を選出する方法は全部で何通りあるか。

練成問題　A

1　次の問に答えよ。　(⇨ ポイント１)

□(1)　4 つの文字,「あ, か, さ, た」から 2 つの文字を選んでできる 2 文字の単語を, 樹形図を用いてすべて列挙せよ。

□(2)　(1)の 4 つの文字について,「さ」から始まって「あ」で終わる 4 文字の単語を, 樹形図を用いてすべて列挙せよ。

2□　11 を３つの異なる自然数の和に表す方法の個数を求めよ。ただし, 加える順序は区別しないものとする。　(⇨ ポイント１)

3□　A, B, C ３つの地点に用事があるとする。この３地点をすべて１回ずつ回る順番は何通りあるか。樹形図を用いて列挙せよ。　(⇨ ポイント１)

4□　７または 10 を, ３つの異なる自然数の和に表す方法の個数を求めよ。ただし, 加える順序は区別しないものとする。　(⇨ ポイント２)

5□　１つのさいころを２回続けて投げるとする。出た目の和が５または６になる場合は何通りあるか。　(⇨ ポイント２)

6□　１つのさいころを２回続けて投げるとする。出た目の和が６の倍数になるのは全部で何通りあるか。　(⇨ ポイント２)

7□　Aチームには 11 人の選手が, Bチームには 10 人の選手がいる。この両チームからそれぞれ１人ずつ代表を出す場合, この代表の選び方は全部で何通りあるか。　(⇨ ポイント３)

練成問題　B

1　次の問に答えよ。

□(1)　17 を 3 つの異なる奇数の和に表す方法は何通りあるか。ただし，加える順序は区別しないものとする。

□(2)　17 を 3 つの奇数の和に表したい。同じ数を使ってよいとすると，表し方の総数は何通りになるか。ただし，加える順序は区別しないものとする。

2　1 つのさいころを 2 回続けて投げるとする。次の問に答えよ。

□(1)　2 回目に出た目が 1 回目に出た目より大きいのは全部で何通りあるか。樹形図を用いて数えよ。

□(2)　2 回目に出た目が(1 回目に出た目 − 2)以下であるのは何通りか。

3　次の問に答えよ。

□(1)　$(x+y+z)(a+b+c)$ を展開したとき，出てくる項の個数を求めよ。

□(2)　$(x+y)(a+b+c)(\alpha+\beta+\gamma)$ を展開したとき，出てくる項の個数を求めよ。このうち，b を含む項は全部で何個あるか。

4　次の問に答えよ。

□(1)　0，1，2，3 の 4 つの数字を 1 回ずつ用いてできる，4 桁の整数は全部で何通りあるか。

□(2)　同じく，4 桁の偶数は全部で何通りあるか。

5□　区別できない 3 つのさいころを同時に投げたとき，目の和が 9 または 10 になる場合の数を求めよ。

6　3 桁の整数を考える。(1)，(2)，(3)のそれぞれについて条件を満たすものの個数を求めよ。

□(1)　すべての桁の数字が偶数

□(2)　(百の位の数) + (一の位の数) = (十の位の数) − 2

□(3)　0 が使われている

7　トランプのハートの 13 枚をよく切って裏返しにしておく。ここから 2 枚続けてカードを引くとき，次の問に答えよ。ただし，Aは 1，Jは 11，Qは 12，Kは 13 と数える。

□(1)　2 枚とも絵札（J，Q，K，A）になるのは全部で何通りあるか。

□(2)　1 枚目の札の数字と 2 枚目の札の数字を合計したら 10 になるのは全部で何通りあるか。

□(3)　1 枚目の札の数字より 2 枚目の札の数字の方が 6 以上大きいのは全部で何通りあるか。

8□　1 学年に 3 クラスあり，A組には 8 人，B組には 6 人，C組には 11 人の生徒がいる。各クラスから 1 人ずつ代表を出す選び方は全部で何通りあるか。

9□　あるイスは，買う人が

①　ひじかけの有無　　②　色は 5 色の中から選べる　　③　皮ばりか布ばりか

という選択をして，自分の気に入ったモデルから選べるようになっている。会社は全部で何種類のモデルを用意しておけばよいか。

10　次の問に答えよ。

□(1)　2^a3^b，$0 \leqq a \leqq 2$，$0 \leqq b \leqq 2$ の形の数は全部でいくつあるか。

□(2)　$2^a3^b5^c$，$0 \leqq a \leqq 2$，$0 \leqq b \leqq 3$，$0 \leqq c \leqq 1$ の形の数は全部でいくつあるか。

□(3)　(2)の形の数のうち，3 で割り切れないものは全部でいくつあるか。

11　1，1，1，2，2，3 の 6 つの数字から 3 つの数字を選んで 3 桁の数を作る。次の問に答えよ。

□(1)　全部でいくつの数が作れるか。

□(2)　3 つの数字がすべて異なっているような数は全部でいくつあるか。

□(3)　3 つの数字のうち，2 つだけが等しいような数は全部でいくつあるか。