目　次

1　数列 ………………………… 4
①　数列とその項
②　数列の表し方
③　数列の一般項
④　数列の一般項の推定

2　等差数列（Ⅰ）………………… 8
①　等差数列の定義
②　等差数列の初項と公差
③　等差数列の項の計算
④　等差数列の一般項(1)
⑤　等差数列の一般項(2)

3　等差数列（Ⅱ）………………… 12
①　等差数列の項
②　等差数列の一般項を求めること
③　等差数列をなす３つの数
④　調和数列

4　等差数列の和（Ⅰ）…………… 16
①　等差数列の和の公式(1)
②　等差数列の和の公式(2)
③　等差数列の和の公式で求められる和
④　三角数・四角数，自然数の和

5　等差数列の和（Ⅱ）…………… 20
①　条件を満たす自然数の和(1)
②　条件を満たす自然数の和(2)
③　等差数列の和の最大
④　等差数列の和の値

6　等比数列 ……………………… 24
①　等比数列の定義
②　等比数列の一般項(1)
③　等比数列の一般項(2)
④　等比数列の一般項(3)

7　等比数列の和 ………………… 28
①　等比数列の和の公式
②　等比数列の和の公式で求められる和
③　複利計算

8　いろいろな数列の和（Ⅰ）……… 32
①　記号Σ(1)
②　記号Σ(2)
③　記号Σ(3)
④　Σの公式

9　いろいろな数列の和（Ⅱ）……… 36
①　差の形に表された数列の和
②　分数の形の数列の和
③　$a_n = nr^{n-1}$ の形の数列の和
④　群数列

10　階差数列 ……………………… 40
①　階差数列
②　階差数列ともとの数列の関係
③　階差数列によるもとの数列の推定
④　数列の和と一般項の関係

11　帰納的定義と漸化式 ………… 44
①　帰納的定義と漸化式
②　漸化式の解法(1)
③　漸化式の解法(2)
④　漸化式の解法(3)

12　数学的帰納法 ………………… 48
①　数学的帰納法による証明
②　数学的帰納法による不等式の証明
③　数学的帰納法による整数の性質の証明
④　漸化式と数学的帰納法

13　発展［３項間の漸化式］………… 54
①　３項間の漸化式
②　３項間の漸化式と２次方程式の関係
③　フィボナッチ数列

◇練成問題Ｃ（１）………………… 58

14　事象の独立，確率分布 ………… *62*
①　独立事象の乗法定理
②　事象の独立と従属
③　確率変数
④　確率分布

15　確率変数の期待値と分散 ……… *66*
①　確率変数の期待値
②　確率変数の分散と標準偏差
③　分散の計算の公式
④　確率変数の変換
⑤　確率変数の和の期待値

16　独立な確率変数，二項分布 …… *70*
①　独立な確率変数
②　独立な確率変数の積の期待値
③　独立な確率変数の和の分散
④　二項分布
⑤　二項分布の平均と分散

17　連続型確率変数と正規分布 …… *74*
①　連続型確率変数と確率密度関数
②　連続型確率変数の平均と分散
③　正規分布
④　二項分布の正規分布による近似

18　統計的な推測 ………………… *80*
①　母集団と標本
②　標本平均の分布
③　大数の法則
④　母平均の推定
⑤　母比率の推定
⑥　仮説検定

□付　録

正規分布表・乱数表 ……………… *88*

1　数列

ポイント1　数列とその項

1)　数をひとつずつ順番に並べたものを**数列**という。

それぞれの数をその数列の**項**といい，最初のものを**初項**(または第 1 項)，以下順に，第 2 項，第 3 項，…のように呼ぶ。

2)　数列に最後の項があるとき，その項を**末項**という。

そのような数列，つまり，数列に含まれる項の個数が有限のものを，**有限数列**といい，項の個数を項数という。これに対して，終わりなく続いていく数列を**無限数列**という。

例　(1)　有限数列 $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{11}$ について

その初項は 1，末項は $\frac{1}{11}$，項数は 6

(2)　有限数列 1，1，2，2，3，3，1，1 について

その初項は 1，末項は 1，項数は 8

確認問題1　次の有限数列の初項，末項，項数をそれぞれ求めよ。

□(1)　0，1，2，3，4

□(2)　1，−1，1，−1

□(3)　10，9，8，7，6，5，4

ポイント2　数列の表し方

1)　数列を表すのに，第 1 項(初項)を a_1，第 2 項を a_2，第 3 項を a_3，…というように番号をつけた文字で表す。n 番目の項を第 n 項といい，a_n で表す。

2)　数列 a_1，a_2，a_3，…全体を表すのに，$\{a_n\}$ という記号を用いる。

例　(1)　数列 1，1，2，2，3，3，1，1 を $\{a_n\}$ とするとき

$a_1 = a_2 = 1$，$a_3 = 2$，$a_5 = 3$ などとなる。

(2)　無限数列 2，4，6，8，10，12，…を $\{b_n\}$ とするとき

$b_1 = 2$，$b_2 = 4$，$b_3 = 6$，$b_4 = 8$ である。

確認問題2　次の数列を $\{a_n\}$ とするとき，a_2，a_3，a_5 をそれぞれ求めよ。

□(1)　0，1，2，3，4

□(2)　10，9，8，7，6，5，4

□(3)　1，3，5，7，9，11，13，…

□(4)　$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{12},\ \cdots$

ポイント3　数列の一般項

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項が n の式で表されるとき，これを $\{a_n\}$ の**一般項**という。

例 (1)　一般項 $a_n = n + 1$ である数列は

$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots$

これを $\{a_n\}$ と書くかわりに，$\{n + 1\}$ と書くこともある。

また，この数列の第 10 項は，

$a_{10} = 10 + 1 = 11$

(2)　一般項 $a_n = 2^n$ である数列は

$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \cdots$

これを表すのに，$\{2^n\}$ と書くこともできる。

また，この数列の第 10 項は，

$a_{10} = 2^{10} = 1024$

注意　数列の一般項は簡単な式で表されないこともある。

たとえば n 番目に小さい素数を a_n とすると

$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 7,\ a_5 = 11,\ a_6 = 13,\ \cdots$

となる。

確認問題3　次の数列の初項から第 3 項までを書け。また第 10 項を求めよ。

□(1)　$\{n\}$

□(2)　$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$

□(3)　$\{2n - 1\}$

□(4)　$\{n^2\}$

ポイント4　数列の一般項の推定

例 (1)　数列 5，10，15，20，25，30，…の一般項は $5n$ と推定される。

したがって第 10 項は 50 となる。

(2)　数列 4，7，10，13，16，19，22，25，…の一般項は $3n + 1$ と推定される。

したがって第 10 項は 31 となる。

確認問題4　次の数列の一般項を推定せよ。また，その推定による第 10 項を求めよ。

□(1)　$5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ \cdots$

□(2)　$\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16},\ \dfrac{1}{32},\ \dfrac{1}{64},\ \cdots$

□(3)　$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

練成問題　A

1　次の有限数列の初項，末項，項数をそれぞれ求めよ。　(⇨ ポイント１)

□(1)　$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}$　　□(2)　$7,\ 5,\ 3,\ 1$

□(3)　$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64$　　□(4)　$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$

2　次の数列を $\{a_n\}$ とするとき，a_2，a_3，a_5 をそれぞれ求めよ。　(⇨ ポイント２)

□(1)　$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}$　　□(2)　$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1$

□(3)　$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \cdots$　　□(4)　$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$

3　次の数列の初項から第３項までを書け。また第６項を求めよ。　(⇨ ポイント３)

□(1)　$\{n-1\}$　　□(2)　$\left\{\frac{2}{n}\right\}$

□(3)　$\{3n+1\}$　　□(4)　$\{4n-1\}$

□(5)　$\{(-1)^n\}$　　□(6)　$\{3^n\}$

□(7)　$\{n(n+1)\}$　　□(8)　$\{n^2-1\}$

4　次の数列の一般項を推定せよ。またその推定による第 10 項を求めよ。　(⇨ ポイント４)

□(1)　$-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6,\ \cdots$

□(2)　$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \cdots$

□(3)　$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \cdots$

□(4)　$\frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{3}{16},\ \frac{3}{32},\ \frac{3}{64},\ \cdots$

練成問題　B

1　次の数列の一般項を推定せよ。またその推定による第 10 項を求めよ。

□(1)　8，11，14，17，20，23，26，…

□(2)　$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{6}{7}$，…

□(3)　-1，2，-4，8，-16，32，…

□(4)　1，3，1，3，1，3，…

2　次のような数列の一般項を求めよ。

□(1)　正の奇数を小さいものから順に並べた数列

□(2)　3 で割って 2 余る自然数を小さいものから順に並べた数列

□(3)　4 と 6 の公倍数のうち，正のものを小さいものから順に並べた数列

3　次の数列 $\{a_n\}$ の初項から第 8 項までを求めよ。

□(1)　a_n は，1000 を n で割ったときの余りとする。

□(2)　a_n は，$n+1$ を素因数分解したときに何個の素数の積に表されるかの，その個数とする。

□(3)　a_n は，1 から n までの自然数のうち，n との最大公約数が 1 であるものの個数とする。

4　次の問に答えよ。

□(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n = n^2 + n$ で与えられるとき，次の式で定められる数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

$b_n = a_{n+1} - a_n$，$c_n = a_{2n} - 4a_n$

□(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n = 2^n + 3^n$ で与えられるとき，次の式で定められる数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

$b_n = a_{n+1} - 2a_n$，$c_n = a_{n+1} - 3a_n$

2　等差数列（Ⅰ）

ポイント1　等差数列の定義

ある一定の数 d があって，初項に次々と d を加えていくことによって得られる数列を**等差数列**という。d をこの等差数列の**公差**という。

例　(1)　初項 1，公差 2 の等差数列は

$1,\ 1+2=3,\ 3+2=5,\ 5+2=7,\ \cdots$

すなわち　1，3，5，7，9，11，…

(2)　初項 7，公差 -4 の等差数列は

$7,\ 7-4=3,\ 3-4=-1,\ -1-4=-5,\ \cdots$

すなわち　7，3，-1，-5，-9，-13，…

(3)　初項 $\frac{1}{2}$，公差 $\frac{1}{3}$ の等差数列は

$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6},\ \frac{5}{6}+\frac{1}{3}=\frac{7}{6},\ \frac{7}{6}+\frac{1}{3}=\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6},\ \frac{11}{6}+\frac{1}{3}=\frac{13}{6},\ \cdots$

すなわち　$\frac{1}{2},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{6},\ \frac{3}{2},\ \frac{11}{6},\ \frac{13}{6},\ \cdots$

確認問題1　次の等差数列の初項から第 5 項までを書け。

□(1)　初項　2，公差　1

□(2)　初項　1，公差　3

□(3)　初項　5，公差　-1

ポイント2　等差数列の初項と公差

例　等差数列 5，9，13，17，…は

初項　5，公差　4

確認問題2　次の等差数列の初項と公差を求めよ。

□(1)　1，2，3，4，…

□(2)　3，5，7，9，…

ポイント3　等差数列の項の計算

例　数列 2，$\boxed{}$，8，11，…が等差数列のとき

$\boxed{}$ 内の数は 5

確認問題3　次の数列が等差数列になるように $\boxed{}$ 内に数を入れよ。

□(1)　2，$\boxed{}$，6，8，…

□(2)　-5，-2，$\boxed{}$，4，…

ポイント4　等差数列の一般項(1)

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると

$$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$$

逆に，一般項がこのような式になる数列は，等差数列である（下の注意参照）。

例　(1)　初項 1，公差 2 の等差数列の一般項 a_n は

$$a_n = 1 + (n-1)\cdot 2 = 2n - 1$$

(2)　初項 5，公差 -1 の等差数列の一般項 a_n は

$$a_n = 5 + (n-1)\cdot(-1) = -n + 6$$

(3)　初項 $\frac{1}{2}$，公差 $\frac{1}{3}$ の等差数列の一般項 a_n は

$$a_n = \frac{1}{2} + (n-1)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}n + \frac{1}{6}$$

注意　一般項 a_n が n の 1 次式に表される数列は等差数列である。実際

$$a_n = pn + q$$

のとき，

$$a_n = p + q + (n-1)p$$

すなわち初項 $p+q$，公差 p

確認問題4　次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

□(1)　初項　2，公差　1

□(2)　初項　1，公差　3

□(3)　初項　-2，公差　4

ポイント5　等差数列の一般項(2)

例　(1)　等差数列　3，7，11，15，…

初項は 3，公差は 4 だから

その一般項は　$3 + (n-1)\cdot 4 = 4n - 1$

(2)　等差数列 31，28，25，22，…

初項は 31，公差は -3 だから

その一般項は　$31 + (n-1)\cdot(-3) = -3n + 34$

確認問題5　次の等差数列の公差と一般項を求めよ。

□(1)　3，5，7，9，…

□(2)　8，11，14，17，…

練成問題　A

1　次の等差数列の初項から第５項までを書け。　（⇨ ポイント１）

□(1)　初項　3，公差　2　　□(2)　初項　-1，公差　3

□(3)　初項　4，公差　-1　　□(4)　初項　2，公差　4

2　次の等差数列の初項と公差を求めよ。　（⇨ ポイント２）

□(1)　-1，1，3，5，…　　□(2)　8，5，2，-1，…

□(3)　7，8，9，10，…　　□(4)　$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，…

3　次の数列が等差数列になるように $\boxed{}$ 内に数を入れよ。　（⇨ ポイント３）

□(1)　1，3，$\boxed{}$，7，…　　□(2)　7，$\boxed{}$，13，16，…

□(3)　1，$\boxed{}$，2，$\frac{5}{2}$，…　　□(4)　-3，2，$\boxed{}$，12，…

4　次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　（⇨ ポイント４）

□(1)　初項　3，公差　2　　□(2)　初項　-1，公差　3

□(3)　初項　4，公差　-1　　□(4)　初項　7，公差　5

5　次の等差数列の公差と一般項を求めよ。　（⇨ ポイント５）

□(1)　-2，-4，-6，-8，…　　□(2)　1，7，13，19，…

□(3)　-5，-2，1，4，…　　□(4)　$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，1，$\frac{5}{4}$，…

練成問題　B

1　**次の等差数列の初項，公差，一般項を求めよ。**

□(1)　$-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\boxed{}$，2，…　　　　□(2)　$\boxed{}$，$\boxed{}$，10，13，…

2　**次の問に答えよ。**

□(1)　正の偶数を小さいものから順に並べた数列は等差数列であることを示し，その初項，公差，一般項を求めよ。

□(2)　7 で割って 5 余る自然数を小さいものから順に並べた数列は等差数列であることを示し，その初項，公差，一般項を求めよ。

3　**次の問に答えよ。**

□(1)　等差数列 $\{a_n\}$ の第 5 項が 17，公差が 3 のとき，$\{a_n\}$ の初項と一般項を求めよ。

□(2)　等差数列 $\{a_n\}$ の第 3 項が 6，公差が 7 のとき，$\{a_n\}$ の初項と一般項を求めよ。

4　**初項 1，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項 3，公差 2 の等差数列 $\{b_n\}$ について次の問に答えよ。**

□(1)　$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

□(2)　$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の両方に含まれる数を小さいものから順に並べた数列は等差数列になることを示し，その初項，公差，一般項を求めよ。

5　**初項 5，公差 2 の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項 −10，公差 3 の等差数列 $\{b_n\}$ について次の問に答えよ。**

□(1)　$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

□(2)　$\{b_n\}$ の第 a_n 項を第 n 項とする数列を $\{c_n\}$ とする。数列 $\{c_n\}$ は等差数列になることを示し，その初項，公差，一般項を求めよ。

練成問題C（1）

1 **次の問に答えよ。**

□(1) 初項 3，公比 $\sqrt{2}$ の等比数列の一般項と初項から第 n 項までの和を求めよ。

□(2) 初項 4，公比 $2+\sqrt{3}$ の等比数列の一般項と初項から第 n 項までの和を求めよ。

2 **次の問に答えよ。**

□(1) 数列 3，15，…，1875，…は等差数列となることができるか。また，等比数列となることができるか。それぞれ，なることができるときは 1875 が第何項であるかも求めよ。

□(2) 数列 3，6，…，1152，…は等差数列となることができるか。また，等比数列となることができるか。それぞれ，なることができるときは 1152 が第何項であるかも求めよ。

3 **数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が次の条件を満たすとき，以下の問に答えよ。**

$\{a_n\}$ は初項 A，公差 B の等差数列
$\{b_n\}$ は初項 C，公差 D の等差数列
$\{c_n\}$ は初項 E，公比 F の等比数列
ただし A，B，C，D，E，F は自然数

□(1) $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

□(2) 数列 $\{p_n\}$ の第 n 項は数列 $\{b_n\}$ の第 a_n 項に等しいという。このとき $\{p_n\}$ は等差数列であることを示し，その初項，公差を求めよ。

□(3) 数列 $\{q_n\}$ の第 n 項は数列 $\{c_n\}$ の第 a_n 項に等しいという。このとき $\{q_n\}$ は等比数列であることを示し，その初項，公比を求めよ。

4 **座標平面内で x 座標，y 座標の両方が整数である点を格子点という。n を自然数とするとき，次の格子点の個数を求めよ。**

□(1) $(0,\ 0)$，$(0,\ n)$，$(n,\ 0)$ を 3 つの頂点とする三角形の内部および周上にある格子点

□(2) $(0,\ 0)$，$(2n,\ 0)$，$(2n,\ n)$ を 3 つの頂点とする三角形の内部および周上にある格子点

5　次の和を求めよ。

□(1)　$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)$

□(2)　$1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

□(3)　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1+3}{2^2}+\dfrac{1+3+3^2}{2^3}+\cdots+\dfrac{1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}}{2^n}$

□(4)　$\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}$

6　数列 $\{a_n\}$ は $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n(n+1)(n+2)$ を満たす。このとき次の問に答えよ。

□(1)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

□(2)　$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

7　次の数列について，以下の問に答えよ。

$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$

□(1)　第 66 項を求めよ。

□(2)　初項から第 66 項までの和を求めよ。

8　次の数列について，以下の問に答えよ。

$\dfrac{1}{1},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{4},\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5},\ \dfrac{5}{5},\ \cdots$

□(1)　$\dfrac{7}{10}$ は第何項に初めて現れるか。

□(2)　第 100 項を求めよ。

9　自然数を右のように並べるとき，次の問に答えよ。

□(1)　第 2 行の数列 4，3，6，11，18，…について，
その一般項 a_n を求めよ。

□(2)　第 3 列の数列 5，6，7，14，23，…について，
その一般項 b_n を求めよ。

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	・
16	15	14	13	20	・
25	24	23	22	21	・
・	・	・	・	・	・

10 数列 $\{a_n\}$ は等式 $a_{n+1}-2a_n=2^{n+1}$，$a_1=2$ を満たす。このとき次の問に答えよ。

□(1)　$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくとき，$\{b_n\}$ の満たす漸化式を求めよ。

□(2)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

11 $a_n>0$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，$2S_n=a_n{}^2+a_n-2$ が成り立っている。このとき次の問に答えよ。

□(1)　a_1 を求めよ。

□(2)　$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ であることを用いて，a_{n+1} と a_n の間に成り立つ関係式を求めよ。

□(3)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

12 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ があり，$\begin{cases} a_{n+1}=3a_n-2b_n \\ b_{n+1}=2a_n-2b_n \end{cases}$，$a_1=1$，$b_1=-1$ の関係を満たしている。このとき次の問に答えよ。

□(1)　$c_n=a_n-2b_n$，$d_n=2a_n-b_n$ とおく。数列 $\{c_n\}$，$\{d_n\}$ の満たす漸化式を求めよ。

□(2)　$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

13 平面内に n 本の直線があり，どの２本も互いに平行ではなく，どの３本も１点で交わっていないとき，これらの直線で分けられる平面の部分の個数を a_n とする。このとき次の問に答えよ。

□(1)　a_n と a_{n-1} の関係を求めよ。　　□(2)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

14 a_n，b_n は，$(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$ となる整数とする。このとき次の問に答えよ。

□(1)　a_{n+1}，b_{n+1} をそれぞれ a_n，b_n で表せ。

□(2)　$(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$ となることを証明せよ。

15 数列 $\{a_n\}$ は $a_{n+1}=\dfrac{n+3}{(n+1)a_n}$，$a_1=\dfrac{3}{2}$ を満たす。このとき次の問に答えよ。

□(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

□(2)　$\{a_n\}$ の一般項を推定し，数学的帰納法で証明せよ。

16 数列 $\{a_n\}$ は $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n+1}$，$a_1 = 2$ を満たす。このとき次のことを証明せよ。

□(1) すべての自然数に対して $a_n > 1$

□(2) すべての自然数に対して $a_{n+1} < a_n$

17 数列 $\{a_n\}$ は $a_{n+1} = \dfrac{3a_n+4}{2a_n+3}$，$a_1 = 2$ を満たす。このとき次のことを証明せよ。

□(1) すべての自然数 n に対して $a_n > \sqrt{2}$

□(2) すべての自然数 n に対して $a_{n+1} < a_n$

□(3) すべての自然数 n に対して $|a_{n+1} - \sqrt{2}| < (3 - 2\sqrt{2})^2 |a_n - \sqrt{2}|$

18□ 数列 $\{a_n\}$ は $0 < a_k < 1$ $(k = 1, 2, \cdots)$ を満たし，n は 2 以上の自然数とする。このとき次の不等式を証明せよ。

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \cdot \cdots \cdot (1 - a_n) > 1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

19 次の問に答えよ。

□(1) n が 2 以上の自然数のとき，次の不等式を証明せよ。

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$$

□(2) $(x+1)(x+2)(x+3) \cdot \cdots \cdot (x+n)$ を展開した式の x^{n-1} の項の係数を a_n，x^{n-2} の項の係数を b_n とするとき，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。ただし $n \geqq 2$ とする。

20 次の問に答えよ。

□(1) 二項定理により

$$(x+1)^{2n} = {}_{2n}\mathrm{C}_0 x^{2n} + {}_{2n}\mathrm{C}_1 x^{2n-1} + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1} x + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$$

$$(x+1)^n = {}_n\mathrm{C}_0 x^n + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} x + {}_n\mathrm{C}_n$$

である。$(x+1)^{2n} = (x+1)^n \cdot (x+1)^n$ の両辺の x^n の係数を比較することにより，次の等式を示せ。

$${}_n\mathrm{C}_0 \cdot {}_n\mathrm{C}_n + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} \cdot {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_n \cdot {}_n\mathrm{C}_0 = {}_{2n}\mathrm{C}_n$$

□(2) 次の等式を証明せよ。

$${}_{2n}\mathrm{C}_n = ({}_n\mathrm{C}_0)^2 + ({}_n\mathrm{C}_1)^2 + \cdots + ({}_n\mathrm{C}_n)^2$$