

目次

1	ベクトル	4	8	位置ベクトル	32
①	ベクトル		①	位置ベクトル	
②	有向線分		②	位置ベクトルと成分	
③	ベクトルの相等		③	内分点・外分点の位置ベクトル	
④	逆ベクトル		④	三角形の重心の位置ベクトル	
2	ベクトルの演算	8	9	ベクトル方程式 (I)	36
①	ベクトルの加法		①	直線のベクトル方程式	
②	零ベクトル		②	媒介変数表示	
③	ベクトルの減法		③	ベクトル方程式と普通の方程式の関係	
④	ベクトルの実数倍		④	2点を通る直線のベクトル方程式	
3	ベクトルの計算法則	12	⑤	ベクトル方程式で表される点の動く範囲	
①	ベクトルの計算法則		10	ベクトル方程式 (II)	42
②	ベクトルの1次方程式		①	内積を用いた直線のベクトル方程式	
③	ベクトルの大きさと実数倍の関係		②	普通の方程式への変形	
④	ベクトルの平行		③	直線の法線ベクトル	
4	ベクトルの成分	16	④	2直線のなす角	
①	基本ベクトル, ベクトルの成分		⑤	点と直線の距離	
②	点の座標とベクトルの成分の関係		⑥	円のベクトル方程式	
③	ベクトルの成分と大きさの関係		⑦	ベクトル方程式で表される図形	
④	成分表示したベクトルの演算		11	ベクトルの平面図形への応用 (I)	48
5	ベクトルの成分の応用	20	①	3点が同一直線上にある条件	
①	同じ向き単位ベクトル		②	同一直線上にある証明(1)	
②	成分で表されたベクトルの1次方程式		③	基準のベクトルでの他のベクトルの表示	
③	ベクトルの平行		④	点の一致の証明	
④	$\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$ の形に表すこと		⑤	同一直線上にある証明(2)	
⑤	ベクトルの大きさの最小値		⑥	2直線の交点の位置ベクトル	
6	ベクトルの内積	24	12	ベクトルの平面図形への応用 (II)	54
①	ベクトルのなす角		①	線分の長さの計算	
②	ベクトルの内積		②	三角形の面積	
③	ベクトルの成分と内積		③	中線定理	
④	内積の計算公式		④	垂心の存在証明	
7	内積の応用	28	◇	練成問題C (1)	58
①	互いに垂直なベクトル				
②	垂直なベクトルの計算				
③	ベクトルのなす角を内積から求めること				
④	内積を利用したベクトルの大きさの計算				

13 空間座標と空間ベクトル 60

- ① 空間座標
- ② 空間のベクトル
- ③ 空間ベクトルの成分
- ④ 空間ベクトルの和・差・実数倍の成分表示

14 空間ベクトルの計算 64

- ① \vec{AB} の成分
- ② ベクトル \vec{a} , \vec{b} が平行となる条件
- ③ $\vec{d} = k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}$ の形に表すこと
- ④ ベクトルの大きさと成分
- ⑤ 同じ向き単位ベクトル

15 空間ベクトルの内積 68

- ① 空間ベクトルのなす角と内積
- ② 空間ベクトルの内積の公式
- ③ 空間ベクトルのなす角の計算
- ④ 内積の応用

16 空間の位置ベクトル 72

- ① 空間の位置ベクトル, 内分の公式
- ② 外分・重心の公式
- ③ 2点間の距離
- ④ 3点が同一直線上にある条件

17 空間の図形 76

- ① 空間内の直線の式
- ② 直線の媒介変数表示
- ③ 2点を通る直線
- ④ 点から直線へ引いた垂線の足
- ⑤ 4点在同一平面上にある条件
- ⑥ 直線と平面の交点
- ⑦ 球の方程式

18 発展 [平面・直線の方程式] 82

- ① 平面の法線ベクトル
- ② 平面の方程式
- ③ 平面と直線の交点
- ④ 点と平面の距離の公式
- ⑤ 直線の方程式

◇練成問題C (2) 86

19 2次曲線 88

- ① 放物線
- ② 楕円(1)
- ③ 楕円(2)
- ④ 双曲線

20 2次曲線の平行移動 96

- ① 放物線の平行移動
- ② 楕円の平行移動
- ③ 双曲線の平行移動

21 2次曲線と直線, 媒介変数, 極座標 102

- ① 2次曲線と直線の共有点
- ② 2次曲線の接線
- ③ 曲線の媒介変数表示(1)
- ④ 曲線の媒介変数表示(2)
- ⑤ 楕円の媒介変数表示
- ⑥ 極座標と直線の極方程式
- ⑦ 円の極方程式

22 複素数平面 108

- ① 複素数平面
- ② 共役複素数
- ③ 複素数平面上での対称移動
- ④ 複素数の絶対値
- ⑤ 絶対値の計算公式
- ⑥ 複素数の和・差・実数倍の図示

23 複素数平面上の図形 112

- ① 複素数平面上の2点間の距離
- ② 複素数平面上の線分
- ③ 複素数平面上の円
- ④ 複素数平面上の軌跡(1)
- ⑤ 複素数平面上の軌跡(2)

24 複素数の極形式 116

- ① 偏角
- ② 複素数の極形式
- ③ 極形式で表した複素数の積・商
- ④ 複素数の積の図示

25 ド・モアブルの定理 120

- ① ド・モアブルの定理
- ② 複素数の n 乗の計算
- ③ 1の n 乗根
- ④ 方程式 $z^n = a$

◇練成問題C (3) 124

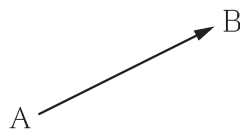
1 ベクトル

ポイント① ベクトル

向きと大きさの2つの性質をあわせもつ量をベクトルという。

例 (1) 列車や自動車の速度はベクトルと考えられる。実際、北向きと東向きの時速 50 kmは、その意味が異なる。

(2) 平面の中の点の移動はベクトルと考えられる。というのは、もと A にあった点が B に移動するというのは、移動距離(移動の“大きさ”)だけではなく、どちらの方向に移動したか(移動の“向き”)もあわせて考えることになるからである。



注意 ベクトルとは向きと大きさをもつ量であるといったが、向きと大きさの2つが無関係に別々にあるのではベクトルとはいえない。それらがひとまとまりのものとして自然な関係を満たしているとき、その量をベクトルというのである。その正確な内容についてはこれから順に学習する。

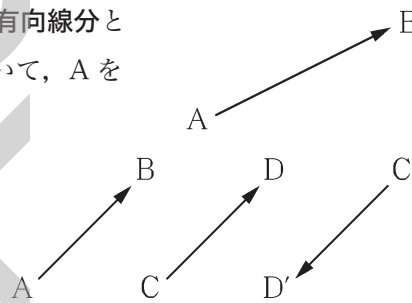
確認問題 1 次のような量のうち、ベクトルと考えられるものはどれか。

- (1) 走っている自転車の速度
- (2) 荷物をはかりにのせて重さをはかったとき、その重さ
- (3) 投げたボールの、ある瞬間の速度

ポイント② 有向線分

点 A から点 B への向きのついた線分 AB を考え、このようなものを有向線分という。図では矢印で表す。A から B へ向きのついた有向線分 AB について、A をその始点、B をその終点という。

2つの有向線分が同じ向きというのは、それらが同じ方向を指していること、つまり、平行で、しかも(平行な場合に考えられる2つの向きのうちで)同じほうを向いているということである。これに対して、平行で違うほうを向いているとき、逆向きという。

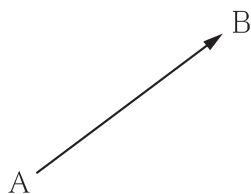


ベクトルの向きと大きさを、有向線分の向きと長さで表すことができる。また逆に、有向線分が与えられたとき、これに対応するベクトルを考えることができる。A から B へ向きのついた有向線分で表されるベクトルを \vec{AB} と書き表す。これは、ポイント 1 の例であげた点の移動のベクトルと同じである。

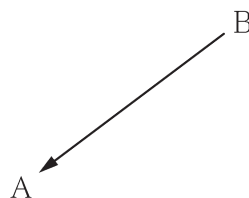
誤解の恐れがないときは、ベクトル \vec{AB} について、A を \vec{AB} の始点、B を \vec{AB} の終点という。

確認問題 2 次図の有向線分で表されたベクトルについて、その始点と終点をいえ。

(1)



(2)



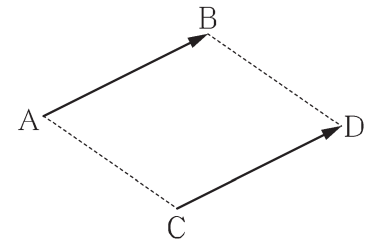
ポイント③ ベクトルの相等

実数を文字で表すとき、実数 a , b などと書いた。これと同じようにベクトルを文字で表すときは、ベクトル \vec{a} , \vec{b} などと書くのが普通である。

2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} が互いに等しいのは、それらの向きと大きさがそれぞれ等しいことと定義する。

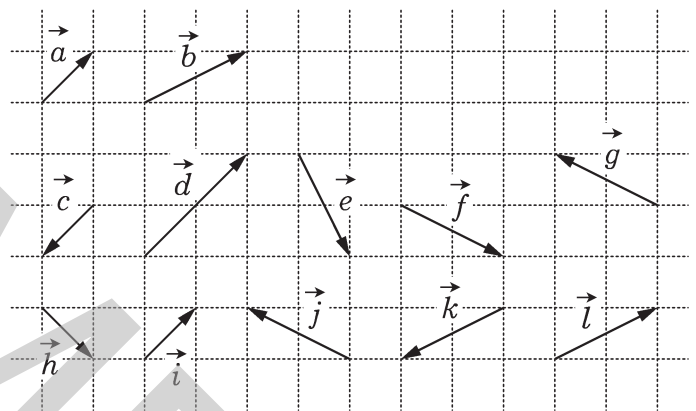
有向線分で表したベクトル \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} については、それらの向きと大きさが等しいというのは、平行移動すると互いに重ね合わされる(特に始点と始点、終点と終点を重ね合わされる)ことである。

このような表し方からすると、ベクトルとは、有向線分についてその向きと大きさだけを考え、始点がどこにあるかを考えないものといってもよい。



確認問題3 次の問に答えよ。

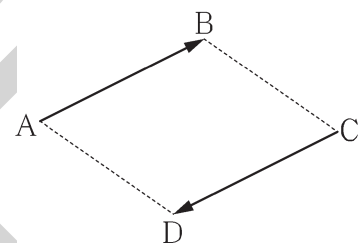
- (1) 右図でベクトル \vec{a} と等しいベクトルをあげよ。
- (2) 右図でベクトル \vec{b} と等しいベクトルをあげよ。



ポイント④ 逆ベクトル

2つのベクトル \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} が逆向きで大きさが等しいとき、それらを互いに逆ベクトルであるという。

ベクトル \vec{a} の逆ベクトルを記号 $-\vec{a}$ で表す。



確認問題4 次の問に答えよ。

- (1) 確認問題3の図でベクトル \vec{a} の逆ベクトルであるものをあげよ。
- (2) 確認問題3の図でベクトル \vec{b} の逆ベクトルであるものをあげよ。

練成問題 A

1 次のような量のうち、ベクトルと考えられるものはどれか。 (⇒ ポイント 1)

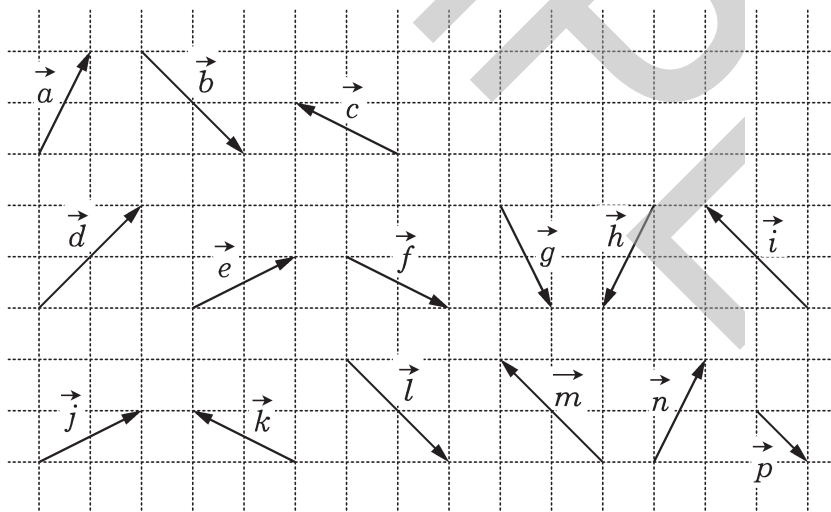
- (1) メスシリンダーで測った水の体積 □(2) 飛んでいる飛行機について、その速度
- (3) “標高何m” というときの、山の高さ

2 次図の有向線分で表されたベクトルについて、その始点と終点をいえ。 (⇒ ポイント 2)

- (1)  □(2) 

3 次の間に答えよ。 (⇒ ポイント 3)

- (1) 次図でベクトル \vec{a} と等しいベクトルをあげよ。
- (2) 次図でベクトル \vec{b} と等しいベクトルをあげよ。
- (3) 次図でベクトル \vec{c} と等しいベクトルをあげよ。



4 次の間に答えよ。 (⇒ ポイント 4)

- (1) 上図でベクトル \vec{a} の逆ベクトルであるものをあげよ。
- (2) 上図でベクトル \vec{b} の逆ベクトルであるものをあげよ。
- (3) 上図でベクトル \vec{c} の逆ベクトルであるものをあげよ。

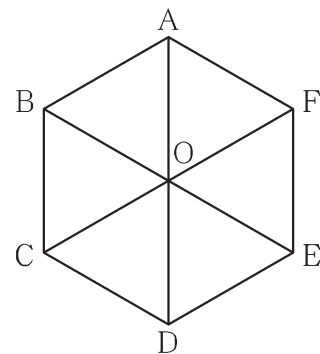
練成問題 B

1 次のような量のうち、ベクトルと考えられるものはどれか。

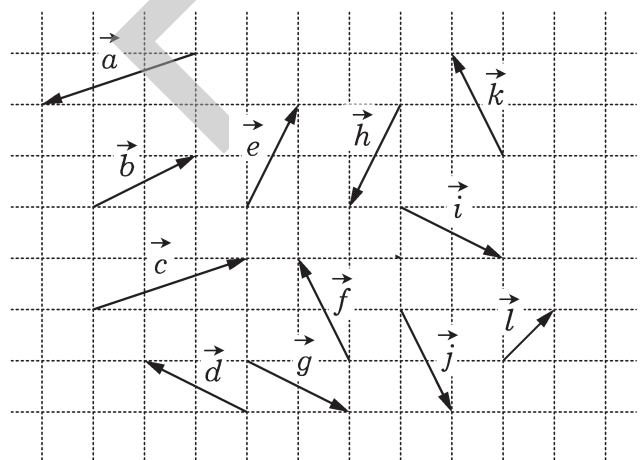
- (1) 境界を指定したときの、土地の面積
- (2) “今日は東の風が吹いている” というときの風向き（風向）
- (3) 夏の日 “今日は太陽が高く影の長さが短い” などというときの太陽の方角・高度
- (4) 台車にひもをつけて引っばるとき、その引っばる力
- (5) 地表の地点を指定したとき、そこでの地球の重力
- (6) 天体望遠鏡を空に向けるとき、どの星のほうを向いているかということ

2 図の正六角形 ABCDEF とその中心 O について、次の問に答えよ。

- (1) \vec{AO} と等しいベクトルを 3 つあげよ。
- (2) \vec{CD} と等しいベクトルを 3 つあげよ。



3 右図に示されたベクトルのうち、互いに等しいものの組をすべてあげよ。また、互いに逆ベクトルになっているものの組をすべてあげよ。



4 右図のベクトル \vec{a} とベクトル \vec{AB} , \vec{CD} がそれぞれ等しいベクトルになるよう点 B, 点 C をとり、有向線分 \vec{AB} , \vec{CD} を作図せよ。



2 ベクトルの演算

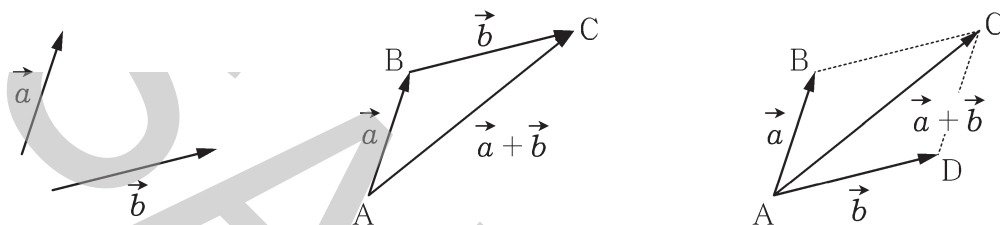
ポイント① ベクトルの加法

2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} の和 $\vec{a} + \vec{b}$ を次のように定める。

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ となる3点 A, B, C をとり, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ と定義する。特に, 3点 A, B, C について

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

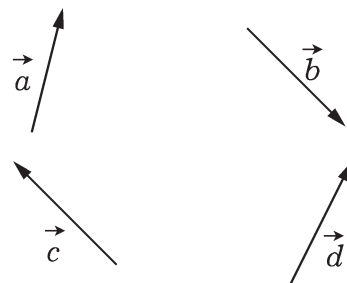
ベクトルの和はまた, 下図のように平行四辺形を使って定義することもできる。このことから, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ もわかる。



確認問題1 次の問に答えよ。

□(1) 右図で与えられたベクトル \vec{a} , \vec{b} に対して, 和 $\vec{a} + \vec{b}$ を図示せよ。

□(2) 右図で与えられたベクトル \vec{c} , \vec{d} に対して, 和 $\vec{c} + \vec{d}$ を図示せよ。



ポイント② 零ベクトル

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ を考えると, \overrightarrow{AA} というベクトルを考える必要が出てくる。このようなものもベクトルの仲間に入れることにする。このベクトルを零ベクトルといい, 記号 $\vec{0}$ で表す。

零ベクトルについて, その大きさは0とし, 向きは定めない。

任意のベクトル \vec{a} と零ベクトル $\vec{0}$ について

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

確認問題2 次のベクトルが零ベクトルになるかどうか答えよ。

□(1) $\vec{0} + \vec{0}$

□(2) 2点 C, D があるとき, $\overrightarrow{CD} + (-\overrightarrow{CD})$

ポイント③ ベクトルの減法

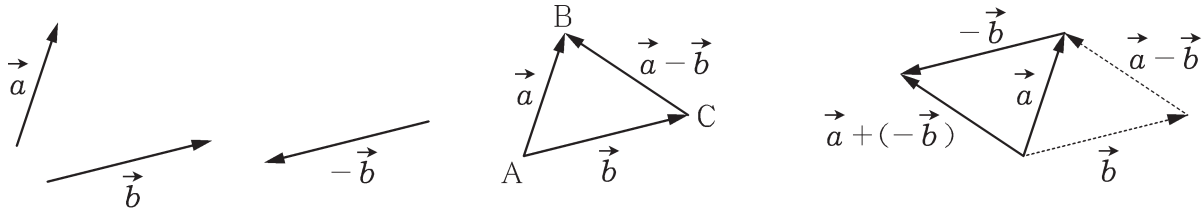
2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} の差 $\vec{a} - \vec{b}$ を次のように定める。

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ となる3点A, B, C をとり, $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{CB}$ と定義する。

すなわち, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ から

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$

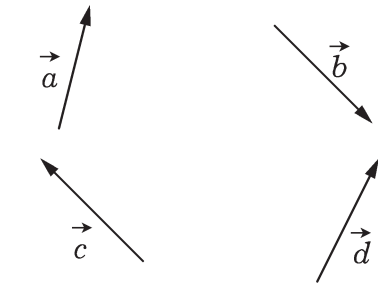
\vec{b} の逆ベクトル $-\vec{b}$ を使えば, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



確認問題3 次の問に答えよ。

□(1) 右図で与えられたベクトル \vec{a} , \vec{b} に対して, 差 $\vec{a} - \vec{b}$ を図示せよ。

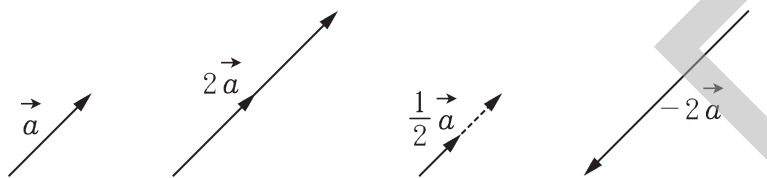
□(2) 右図で与えられたベクトル \vec{c} , \vec{d} に対して, 差 $\vec{c} - \vec{d}$ を図示せよ。



ポイント④ ベクトルの実数倍

ベクトルの実数倍を次のように定義する。 \vec{a} をベクトル, k を実数とすると, \vec{a} の k 倍 $k\vec{a}$ は

- 1) $k > 0$ のとき \vec{a} と同じ向きで大きさが k 倍のベクトル
- 2) $k = 0$ のとき $\vec{0}$ (零ベクトル)
- 3) $k < 0$ のとき \vec{a} と逆向きで大きさが $|k|$ 倍 ($-k$ 倍) のベクトル

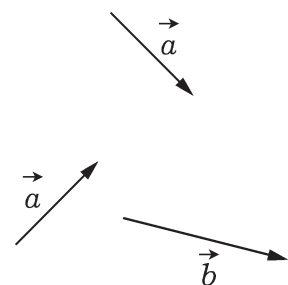


$(-1)\vec{a}$ は \vec{a} と逆向きで \vec{a} と大きさが等しいベクトルだから, \vec{a} の逆ベクトルである。 $(-1)\vec{a}$ と書くより長くなるから, 普通は \vec{a} の -1 倍も単に $-\vec{a}$ と書く。

確認問題4 次の問に答えよ。

□(1) 右図で与えられたベクトル \vec{a} に対して, $2\vec{a}$, $-\vec{a}$ をそれぞれ図示せよ。

□(2) 右図で与えられたベクトル \vec{a} , \vec{b} に対して $2\vec{a} - \vec{b}$ を図示せよ。



練成問題 A

1 次の間に答えよ。

(⇒ ポイント 1)

- (1) 右図で与えられたベクトル \vec{a} , \vec{b} に対して, 和 $\vec{a} + \vec{b}$ を図示せよ。



- (2) 右図で与えられたベクトル \vec{c} , \vec{d} に対して, 和 $\vec{c} + \vec{d}$ を図示せよ。



2 次のベクトルが零ベクトルになるかどうか答えよ。

(⇒ ポイント 2)

- (1) $\vec{a} + (-\vec{a})$

- (2) 2点 E, F があるとき, $\vec{EF} + \vec{FE}$

3 次の間に答えよ。

(⇒ ポイント 3)

- (1) 右図で与えられたベクトル \vec{a} , \vec{b} に対して, 差 $\vec{a} - \vec{b}$ を図示せよ。



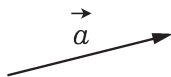
- (2) 右図で与えられたベクトル \vec{c} , \vec{d} に対して, 差 $\vec{c} - \vec{d}$ を図示せよ。



4 次の間に答えよ。

(⇒ ポイント 4)

- (1) 次図で与えられたベクトル \vec{a} に対して, $2\vec{a}$, $-\vec{a}$ をそれぞれ図示せよ。



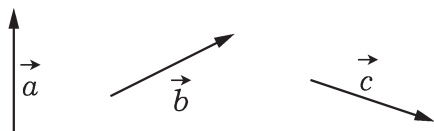
- (2) 次図で与えられたベクトル \vec{a} , \vec{b} に対して $2\vec{a} - \vec{b}$ を図示せよ。



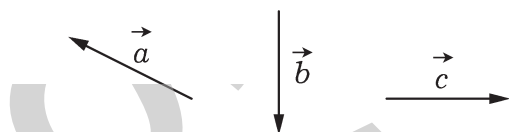
練成問題 B

1 次の問に答えよ。

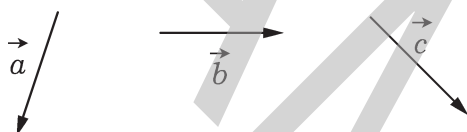
□(1) 次図で与えられたベクトルに対して、ベクトル $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ を図示せよ。



□(2) 次図で与えられたベクトルに対して、ベクトル $(2\vec{a} - \vec{b}) + 3\vec{c}$ を図示せよ。



□(3) 次図で与えられたベクトルに対して、ベクトル $(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{3}\vec{c}$ を図示せよ。



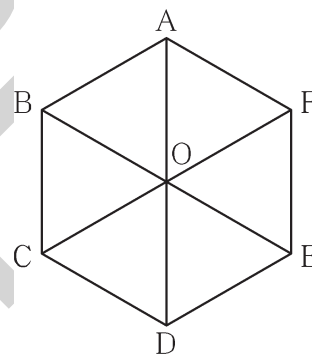
2 図の正六角形 ABCDEF とその中心 O について、次の問に答えよ。

□(1) $\vec{AB} + \vec{EF}$ に等しいベクトルを 1 つあげよ。

□(2) $\vec{AF} + \vec{CD}$ に等しいベクトルを 1 つあげよ。

□(3) $\vec{CD} - \vec{AB}$ に等しいベクトルを 1 つあげよ。

□(4) AB の中点を M とするとき、 $2\vec{OM}$ に等しいベクトルを 1 つあげよ。



練成問題C (1)

1 次のベクトル \vec{a} , \vec{b} のなす角を求めよ。

□(1) $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1 + 4\sqrt{3})$, $\vec{b} = (1 + \sqrt{3}, 3)$

□(2) $\vec{a} = (1, \sqrt{7})$, $\vec{b} = (4 - \sqrt{7}, -3)$

2 次の間に答えよ。

□(1) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$, t は実数のとき $|\vec{a} + t\vec{b}|$ の最小値を求めよ。

□(2) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, t は実数のとき $|\vec{a} + t\vec{b}|$ の最小値を求めよ。

3 次の間に答えよ。

□(1) ベクトル $(1, 3)$ と 60° の角をなし、大きさが $2\sqrt{10}$ のベクトルを求めよ。

□(2) ベクトル $(7, 1)$ と 45° の角をなし、大きさが5のベクトルを求めよ。

4 次の間に答えよ。

□(1) \vec{a} , \vec{b} が $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ を満たし、 $3\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{a} - 2\vec{b}$ が垂直であるとき、 \vec{a} , \vec{b} のなす角を求めよ。

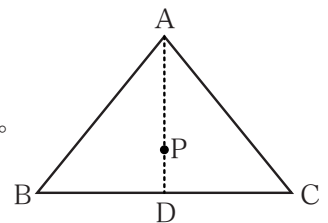
□(2) \vec{a} , \vec{b} が $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}$ を満たし、 $2\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{a} - \vec{b}$ が垂直であるとする。 \vec{a} , \vec{b} のなす角を θ とするとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

5 $\triangle ABC$ と点 P について、 $\vec{PA} + 3\vec{PB} + 5\vec{PC} = \vec{0}$ が成り立つとき、次の間に答えよ。

□(1) \vec{AP} を \vec{AB} , \vec{AC} で表せ。

□(2) 直線 AP と辺 BC の交点を D とする。 $BD : DC$ および $AP : PD$ を求めよ。

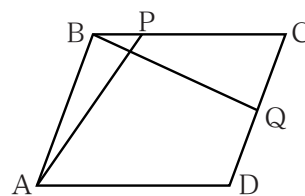
□(3) D は(2)と同様とすると、 $\triangle ABC$ と $\triangle PDC$ の面積比を求めよ。



6 平行四辺形 ABCD において、辺 BC を 1:2 に内分する点を P、CD の中点を Q とおくと、次の間に答えよ。

□(1) \vec{AP} , \vec{BQ} をそれぞれ \vec{AB} , \vec{AD} で表せ。

□(2) $AB = 2$, $AD = 3$, $\angle BAD = 60^\circ$ であるとする。2 直線 AP と BQ のなす角を θ とするとき、 $\cos\theta$ を求めよ。



7 □ $\triangle ABC$ において、 $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$, $CA = \sqrt{2}$ とする。 $\triangle ABC$ の外心を O とするとき、 \vec{AO} を \vec{AB} と \vec{AC} で表せ。

8 $\triangle ABC$ の外心を O とするとき、 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ が成り立っているとする。 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とおくと、次の間に答えよ。

□(1) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ を R で表せ。

□(2) $|\vec{AB}|$ を R で表せ。

□(3) $\triangle ABC$ は正三角形であることを証明せよ。

9 $\triangle ABC$ の外心を O、重心を G とおくと、次の間に答えよ。

□(1) \vec{OG} を \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} で表せ。

□(2) $\vec{OH} = 3\vec{OG}$ によって定まる点 H に対して、 $AH \perp BC$, $BH \perp CA$, $CH \perp AB$ が成り立つことを証明せよ。

注意 H は $\triangle ABC$ の垂心である。このことから、次のオイラーの定理が示されることになる。

$\triangle ABC$ において、外心 O と重心 G が一致しないとき、 $\triangle ABC$ の垂心 H は線分 OG を 3:2 に外分する (G は OH を 1:2 に内分するといってもよい)。

なお、前問 8 からわかるように、外心と重心が一致する三角形は正三角形である。このとき垂心(および内心)もこれらの点と一致する。