目　次

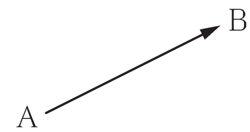
1　ベクトル

ポイント1　ベクトル

向きと大きさの２つの性質をあわせもつ量を**ベクトル**という。

例　(1)　列車や自動車の速度はベクトルと考えられる。実際，北向きと東向きの時速 50 ㎞は，その意味が異なる。

(2)　平面の中の点の移動はベクトルと考えられる。というのは，もと A にあった点が B に移動するというのは，移動距離(移動の“大きさ”)だけではなく，どちらの方向に移動したか(移動の“向き”)もあわせて考えることになるからである。



注意　ベクトルとは向きと大きさをもつ量であるといったが，向きと大きさの２つが無関係に別々にあるのではベクトルとはいえない。それらがひとまとまりのものとして自然な関係を満たしているとき，その量をベクトルというのである。その正確な内容についてはこれから順に学習する。

確認問題1　次のような量のうち，ベクトルと考えられるものはどれか。

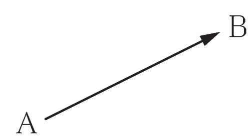
□(1)　走っている自転車の速度

□(2)　荷物をはかりにのせて重さをはかったとき，その重さ

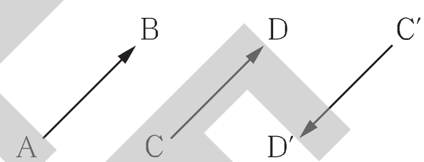
□(3)　投げたボールの，ある瞬間の速度

ポイント2　有向線分

点 A から点 B への向きのついた線分 AB を考え，このようなものを**有向線分**という。図では矢印で表す。A から B へ向きのついた有向線分 AB について，A をその**始点**，B をその**終点**という。



２つの有向線分が**同じ向き**というのは，それらが同じ方向を指していること，つまり，平行で，しかも(平行な場合に考えられる２つの向きのうちで)同じほうを向いているということである。これに対して，平行で違うほうを向いているとき，**逆向き**という。

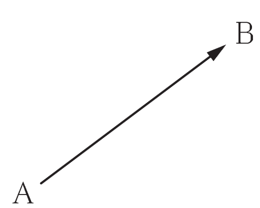


ベクトルの向きと大きさを，有向線分の向きと長さで表すことができる。また逆に，有向線分が与えられたとき，これに対応するベクトルを考えることができる。A から B へ向きのついた有向線分で表されるベクトルを $\overrightarrow{AB}$ と書き表す。これは，ポイント１の例であげた点の移動のベクトルと同じである。

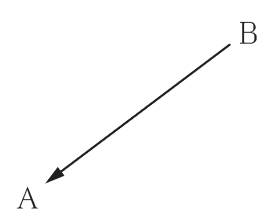
誤解の恐れがないときは，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ について，A を $\overrightarrow{AB}$ の始点，B を $\overrightarrow{AB}$ の終点という。

確認問題2　次図の有向線分で表されたベクトルについて，その始点と終点をいえ。

□(1)



□(2)

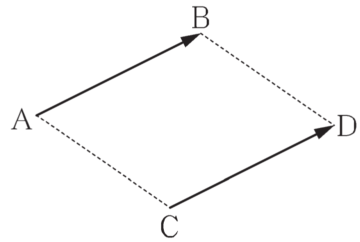


ポイント3　ベクトルの相等

実数を文字で表すとき，実数 a，b などと書いた。これと同じようにベクトルを文字で表すときは，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ などと書くのが普通である。

2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が互いに等しいのは，それらの向きと大きさがそれぞれ等しいことと定義する。

有向線分で表したベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ については，それらの向きと大きさが等しいというのは，平行移動すると互いに重ね合わされる(特に始点と始点，終点と終点が重ね合わされる)ことである。

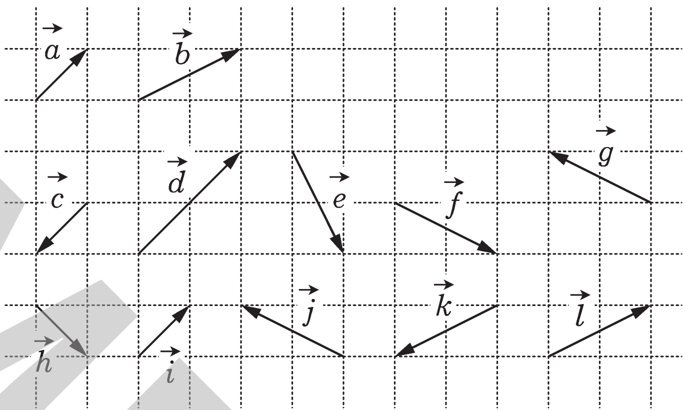


このような表し方からすると，ベクトルとは，有向線分についてその向きと大きさだけを考え，始点がどこにあるかを考えないものといってもよい。

確認問題3　次の問に答えよ。

□(1)　右図でベクトル $\vec{a}$ と等しいベクトルをあげよ。

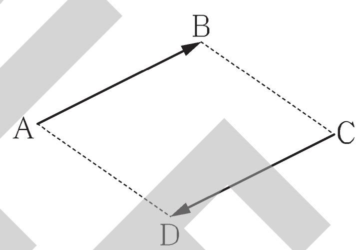
□(2)　右図でベクトル $\vec{b}$ と等しいベクトルをあげよ。



ポイント4　逆ベクトル

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が逆向きで大きさが等しいとき，それらを互いに**逆ベクトル**であるという。

ベクトル $\vec{a}$ の逆ベクトルを記号 $-\vec{a}$ で表す。



確認問題4　次の問に答えよ。

□(1)　確認問題３の図でベクトル $\vec{a}$ の逆ベクトルであるものをあげよ。

□(2)　確認問題３の図でベクトル $\vec{b}$ の逆ベクトルであるものをあげよ。

練 成 問 題　A

1　次のような量のうち，ベクトルと考えられるものはどれか。　(⇨ ポイント 1)

□(1)　メスシリンダーで測った水の体積　　□(2)　飛んでいる飛行機について，その速度

□(3)“標高何m”というときの，山の高さ

2　次図の有向線分で表されたベクトルについて，その始点と終点をいえ。　(⇨ ポイント 2)

□(1)

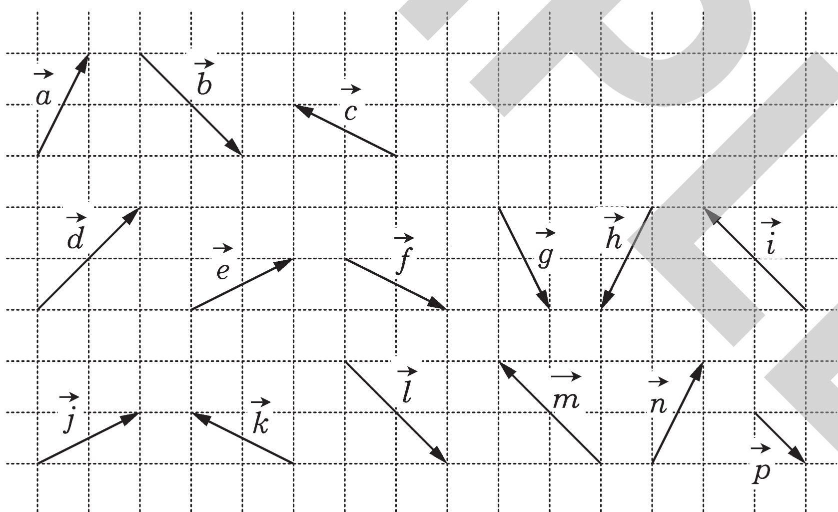
□(2)

3　次の問に答えよ。　(⇨ ポイント 3)

□(1)　次図でベクトル $\vec{a}$ と等しいベクトルをあげよ。

□(2)　次図でベクトル $\vec{b}$ と等しいベクトルをあげよ。

□(3)　次図でベクトル $\vec{c}$ と等しいベクトルをあげよ。



4　次の問に答えよ。　(⇨ ポイント 4)

□(1)　上図でベクトル $\vec{a}$ の逆ベクトルであるものをあげよ。

□(2)　上図でベクトル $\vec{b}$ の逆ベクトルであるものをあげよ。

□(3)　上図でベクトル $\vec{c}$ の逆ベクトルであるものをあげよ。

練成問題　B

1　**次のような量のうち，ベクトルと考えられるものはどれか。**

□(1)　境界を指定したときの，土地の面積

□(2)“今日は東の風が吹いている”というときの風向き（風向）

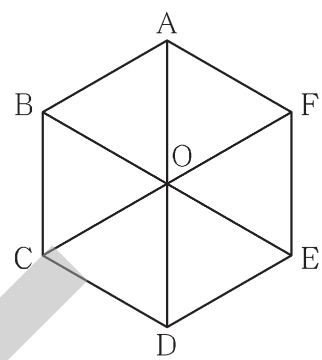
□(3)　夏の日に“今日は太陽が高くて影の長さが短い”などというときの太陽の方角・高度

□(4)　台車にひもをつけて引っぱるとき，その引っぱる力

□(5)　地表の地点を指定したとき，そこでの地球の重力

□(6)　天体望遠鏡を空に向けるとき，どの星のほうを向いているかということ

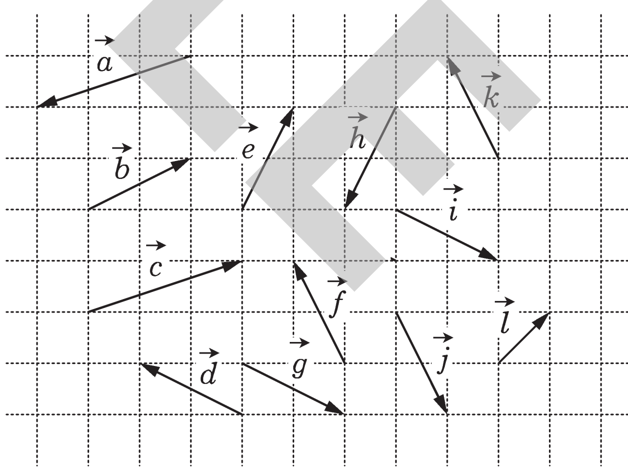
2　**図の正六角形 ABCDEF とその中心 O について，次の問に答えよ。**



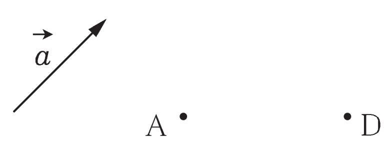
□(1)　$\overrightarrow{AO}$ と等しいベクトルを 3 つあげよ。

□(2)　$\overrightarrow{CD}$ と等しいベクトルを 3 つあげよ。

3 □　**右図に示されたベクトルのうち，互いに等しいものの組をすべてあげよ。また，互いに逆ベクトルになっているものの組をすべてあげよ。**



4 □　**右図のベクトル $\vec{a}$ とベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ がそれぞれ等しいベクトルになるよう点 B，点 C をとり，有向線分 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ を作図せよ。**



2　ベクトルの演算

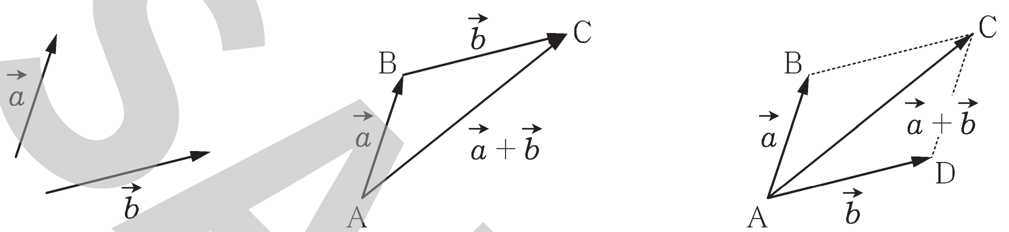
ポイント1　ベクトルの加法

2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の和 $\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}$ を次のように定める。

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となる3点A，B，C をとり，$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と定義する。特に，3点A，B，C について

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

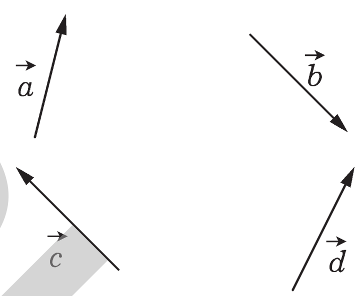
ベクトルの和はまた，下図のように平行四辺形を使って定義することもできる。このことから，$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ もわかる。



確認問題1　次の問に答えよ。

□(1)　右図で与えられたベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，和 $\vec{a}+\vec{b}$ を図示せよ。

□(2)　右図で与えられたベクトル $\vec{c}$，$\vec{d}$ に対して，和 $\vec{c}+\vec{d}$ を図示せよ。



ポイント2　零ベクトル

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ を考えると，$\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ というベクトルを考える必要が出てくる。このようなものもベクトルの仲間に入れることにする。このベクトルを**零ベクトル**といい，記号 $\vec{\mathbf{0}}$ で表す。

零ベクトルについて，その大きさは0とし，向きは定めない。

任意のベクトル $\vec{a}$ と零ベクトル $\vec{0}$ について

$$\boldsymbol{\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}}$$

確認問題2　次のベクトルが零ベクトルになるかどうか答えよ。

□(1)　$\vec{0}+\vec{0}$

□(2)　2点C，Dがあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\left(-\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right)$

ポイント3　ベクトルの減法

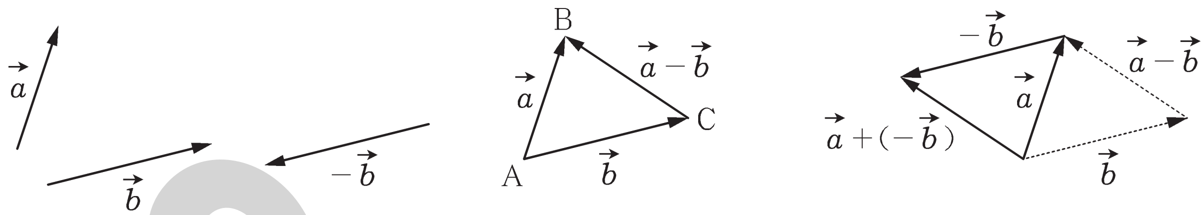
2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の**差** $\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}}$ を次のように定める。

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる3点A，B，C をとり，$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ と定義する。

すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ から

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}}$$

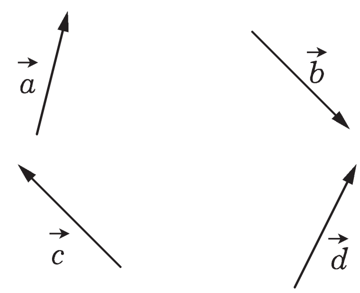
$\vec{b}$ の逆ベクトル $-\vec{b}$ を使えば，$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$



確認問題3　**次の問に答えよ。**

□(1)　右図で与えられたベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，差 $\vec{a}-\vec{b}$ を図示せよ。

□(2)　右図で与えられたベクトル $\vec{c}$，$\vec{d}$ に対して，差 $\vec{c}-\vec{d}$ を図示せよ。



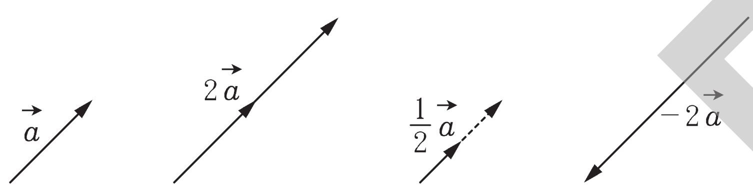
ポイント4　ベクトルの実数倍

ベクトルの**実数倍**を次のように定義する。$\vec{a}$ をベクトル，k を実数とするとき，$\vec{a}$ の k 倍 $\boldsymbol{k\vec{a}}$ は

1）$k>0$ のとき　$\vec{a}$ と同じ向きで大きさが k 倍のベクトル

2）$k=0$ のとき　$\vec{0}$（零ベクトル）

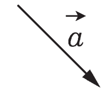
3）$k<0$ のとき　$\vec{a}$ と逆向きで大きさが $|k|$ 倍（$-k$ 倍）のベクトル



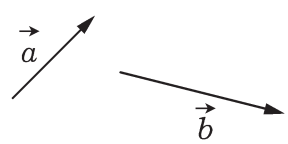
$(-1)\vec{a}$ は $\vec{a}$ と逆向きで $\vec{a}$ と大きさが等しいベクトルだから，$\vec{a}$ の逆ベクトルである。$(-1)\vec{a}$ と書くと長くなるから，普通は $\vec{a}$ の -1 倍も単に $-\vec{a}$ と書く。

確認問題4　**次の問に答えよ。**

□(1)　右図で与えられたベクトル $\vec{a}$ に対して，$2\vec{a}$，$-\vec{a}$ をそれぞれ図示せよ。



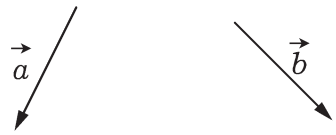
□(2)　右図で与えられたベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して $2\vec{a}-\vec{b}$ を図示せよ。



練成問題　A

1　**次の問に答えよ。**　**(⇨ ポイント 1)**

□(1)　右図で与えられたベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，和 $\vec{a}+\vec{b}$ を図示せよ。



□(2)　右図で与えられたベクトル $\vec{c}$, $\vec{d}$ に対して，和 $\vec{c}+\vec{d}$ を図示せよ。

2　**次のベクトルが零ベクトルになるかどうか答えよ。**　**(⇨ ポイント 2)**

□(1)　$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)$　　□(2)　2 点 E，F があるとき，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}+\overrightarrow{\mathrm{FE}}$

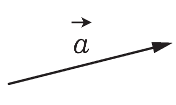
3　**次の問に答えよ。**　**(⇨ ポイント 3)**

□(1)　右図で与えられたベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，差 $\vec{a}-\vec{b}$ を図示せよ。

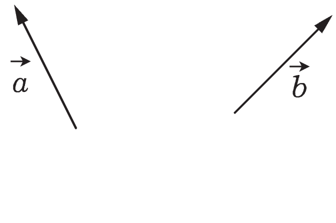
□(2)　右図で与えられたベクトル $\vec{c}$, $\vec{d}$ に対して，差 $\vec{c}-\vec{d}$ を図示せよ。

4　**次の問に答えよ。**　**(⇨ ポイント 4)**

□(1)　次図で与えられたベクトル $\vec{a}$ に対して，$2\vec{a}$, $-\vec{a}$ をそれぞれ図示せよ。



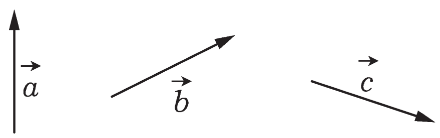
□(2)　次図で与えられたベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して $2\vec{a}-\vec{b}$ を図示せよ。



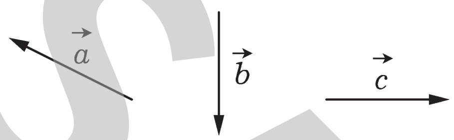
練成問題 B

1 **次の問に答えよ。**

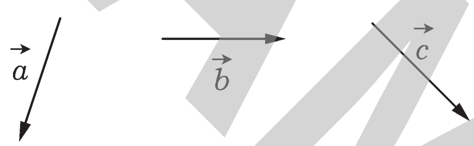
□(1)　次図で与えられたベクトルに対して，ベクトル $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ を図示せよ。



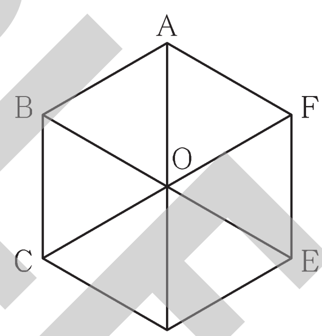
□(2)　次図で与えられたベクトルに対して，ベクトル $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)+3\vec{c}$ を図示せよ。



□(3)　次図で与えられたベクトルに対して，ベクトル $\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)-\frac{1}{3}\vec{c}$ を図示せよ。



2 **図の正六角形 ABCDEF とその中心Oについて，次の問に答えよ。**



□(1)　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}$ に等しいベクトルを 1 つあげよ。

□(2)　$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}$ に等しいベクトルを 1 つあげよ。

□(3)　$\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}$ に等しいベクトルを 1 つあげよ。

□(4)　AB の中点をMとするとき，$2\overrightarrow{OM}$ に等しいベクトルを 1 つあげよ。

練成問題Ｃ（１）

1　**次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を求めよ。**

□(1)　$\vec{a}=\left(\sqrt{3},\ 1+4\sqrt{3}\right)$，$\vec{b}=\left(1+\sqrt{3},\ 3\right)$

□(2)　$\vec{a}=\left(1,\ \sqrt{7}\right)$，$\vec{b}=\left(4-\sqrt{7},\ -3\right)$

2　**次の問に答えよ。**

□(1)　$\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{b}\right|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，t は実数のとき $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ の最小値を求めよ。

□(2)　$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$，t は実数のとき $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ の最小値を求めよ。

3　**次の問に答えよ。**

□(1)　ベクトル $(1,\ 3)$ と 60° の角をなし，大きさが $2\sqrt{10}$ のベクトルを求めよ。

□(2)　ベクトル $(7,\ 1)$ と 45° の角をなし，大きさが 5 のベクトルを求めよ。

4　**次の問に答えよ。**

□(1)　$\vec{a}$，$\vec{b}$ が $\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{b}\right|=2$ を満たし，$3\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を求めよ。

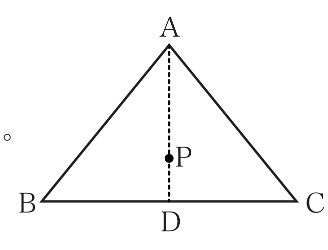
□(2)　$\vec{a}$，$\vec{b}$ が $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3}$，$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{5}$ を満たし，$2\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直であるとする。$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

5　**△ABC と点 P について，$\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立つとき，次の問に答えよ。**

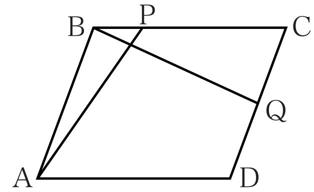
□(1)　$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ。

□(2)　直線 AP と辺 BC の交点を D とする。BD：DC および AP：PD を求めよ。

□(3)　D は(2)と同様とするとき，△ABC と△PDC の面積比を求めよ。



6 平行四辺形ABCDにおいて，辺BCを1：2に内分する点をP，CDの中点をQとおくとき，次の問に答えよ。



□(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$をそれぞれ$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$で表せ。

□(2)　$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AD}=3$，$\angle\mathrm{BAD}=60^\circ$であるとする。2直線APとBQのなす角を$\theta$とするとき，$\cos\theta$を求めよ。

7□　△ABCにおいて，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{BC}=\sqrt{3}$，$\mathrm{CA}=\sqrt{2}$とする。△ABCの外心をOとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$で表せ。

8　△ABCの外心をOとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$が成り立っているとする。△ABCの外接円の半径を$R$とおくとき，次の問に答えよ。

□(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を$R$で表せ。

□(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$を$R$で表せ。

□(3)　△ABCは正三角形であることを証明せよ。

9　△ABCの外心をO，重心をGとおくとき，次の問に答えよ。

□(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$で表せ。

□(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$によって定まる点Hに対して，$\mathrm{AH}\perp\mathrm{BC}$，$\mathrm{BH}\perp\mathrm{CA}$，$\mathrm{CH}\perp\mathrm{AB}$が成り立つことを証明せよ。

注意　Hは△ABCの垂心である。このことから，次の**オイラーの定理**が示されることになる。

△ABCにおいて，外心Oと重心Gが一致しないとき，△ABCの垂心Hは線分OGを3：2に外分する（GはOHを1：2に内分するといってもよい）。

なお，前問**8**からわかるように，外心と重心が一致する三角形は正三角形である。このとき垂心（および内心）もこれらの点と一致する。