数学 Vol.3

目次

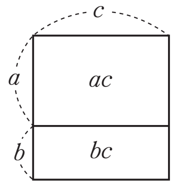
※は発展的内容を示す。

学習日　　月　　日

1　式の展開

ポイント❶ 多項式と単項式の乗除

● a, b, c がどんな数でも，分配法則が成り立つ。



分配法則：$(a+b)c=ac+bc$,　　$a(b+c)=ab+ac$

＊多項式×単項式，単項式×多項式，多項式÷単項式のいずれにも成り立つ。

例　① $2xy(3x-2y)$
$=6x^2y-4xy^2$

② $(a^2-5a-6)\times(-a)$
$=-a^3+5a^2+6a$

③ $\left(\frac{1}{2}x^2y-\frac{2}{3}xy^2\right)\div\frac{1}{6}xy$
$=\frac{6x^2y}{2xy}-\frac{2\cdot 6xy^2}{3xy}$
$=3x-4y$

確認問題❶　次の計算をしなさい。

※□(1)　$(2x^2+x-3)\times 2x$　　□(2)　$(a^2-2a+8)\times(-a)$

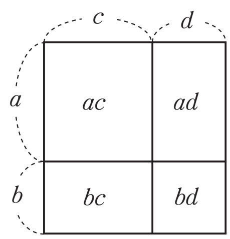
□(3)　$\frac{2}{3}xy(3x-6y)$　　※□(4)　$(-6x^2+9xy)\div(-3x)$

※□(5)　$(4x^2y-8xy^2)\div\frac{2}{3}xy$　　□(6)　$(12a^2b-9ab^2)\div\left(-\frac{3}{2}ab\right)$

ポイント❷ 多項式×多項式の展開

● 多項式の積 $(a+b)(c+d)$ を，和 $ac+ad+bc+bd$ に変形することを式の展開といい，次のような理解のしかたがある。

(1)



(2)

$(a+b)(c+d)$

$=ac+ad+bc+bd$
①　②　③　④

(3)

$$\begin{array}{r} a\quad+b \\ \times)\ \underline{c\quad+d} \\ ac+bc \\ \underline{ad+bd} \\ ac+bc+ad+bd \end{array}$$

(4) $(a+b)(c+d)$
$=(a+b)A$
$=aA+bA$
$=a(c+d)+b(c+d)$
$=ac+ad+bc+bd$

＊説明としては，4番目の，$c+d=A$ とおきかえて分配法則を用いるのが最も理論的。

確認問題❷　次の式を展開しなさい。

※□(1)　$(a-b)(c+d)$　　□(2)　$(a+b)(c-d)$

※□(3)　$(3a+2)(2a-3)$　　□(4)　$(2a+3b)(3a-2b)$

※□(5)　$(x^2-x+1)(x+1)$　　□(6)　$(x^2-x-1)(x-2)$

ポイント 3 乗法公式

● 式の展開の公式を乗法公式という。

(1)	$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$	〔$x+a$と$x+b$の積の公式〕
(2)	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	〔和の平方の公式〕
(2)′	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	〔差の平方の公式〕
(3)	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	〔和と差の積の公式〕

例

① $(x-5)(x+2)$
〔$=x^2+(-5+2)x+(-5)\times 2$〕
$=x^2-3x-10$

② $(2x+3)(2x-1)$
〔$=(2x)^2+(3-1)\cdot 2x+3\times(-1)$〕
$=4x^2+4x-3$

③ $(x+5)^2$
〔$=x^2+2\times x\times 5+5^2$〕
$=x^2+10x+25$

④ $(3x-2y)^2$
〔$=(3x)^2-2\times 3x\times 2y+(2y)^2$〕
$=9x^2-12xy+4y^2$

⑤ $(x+1)(x-1)$
〔$=x^2-1^2$〕
$=x^2-1$

⑥ $(2x+5y)(2x-5y)$
〔$=(2x)^2-(5y)^2$〕
$=4x^2-25y^2$

確認問題 3　乗法公式(1)〜(3)を導きなさい。

□

確認問題 4　次の式を展開しなさい。

※□(1) $(x+2)(x+8)$
□(2) $(x+4)(x+6)$
※□(3) $(x+3y)(x+9y)$
※□(4) $(x-5)(x-3)$
□(5) $(x-7)(x-8)$
※□(6) $(x-9y)(x-y)$
※□(7) $(x+6)(x-2)$
□(8) $(x+5)(x-4)$
※□(9) $(x+3y)(x-8y)$
□(10) $(x-2)(x+4)$
□(11) $(x-3)(x+2)$
□(12) $(x-9y)(x+6y)$
※□(13) $(2x+3)(2x+5)$
□(14) $(2x-3)(2x-7)$
※□(15) $(2x+9y)(2x-3y)$
□(16) $(3x-2)(3x+4)$
□(17) $(3x+2)(3x+1)$
□(18) $(3x-y)(3x-4y)$
□(19) $(2x+9)(2x-7)$
□(20) $(2x-5)(2x+3)$
□(21) $(3x+4y)(3x-2y)$
※□(22) $(x+6)^2$
※□(23) $(x-4)^2$
※□(24) $(x-5y)^2$
□(25) $(x+1)^2$
□(26) $(x-2)^2$
※□(27) $(2x+1)^2$
□(28) $(3x-2)^2$
□(29) $(2x+3)^2$
※□(30) $(3x-y)^2$
※□(31) $(x+3)(x-3)$
□(32) $(x+8)(x-8)$
□(33) $(x-4)(x+4)$
□(34) $(x-9)(x+9)$
□(35) $(x+5)(x-5)$
□(36) $(x-6)(x+6)$
※□(37) $(2x+3y)(2x-3y)$
□(38) $(5x+3y)(5x-3y)$
□(39) $(x-4y)(x+4y)$
□(40) $(3x-4y)(3x+4y)$

例題 1 複雑な式の展開

問　次の式を展開しなさい。

(1)　$(x+3)(x-3)-(x-5)^2$　　　(2)　$(a-b+4)(a-b-8)$

解答 (1)　$(x+3)(x-3)-(x-5)^2$　　公式を用いて展開＊

$=x^2-9-(x^2-10x+25)$　　同類項の計算

$=10x-34$

＊かっこの前がマイナスのときは，その部分全体にかっこをつけて展開する

(2)　$(a-b+4)(a-b-8)$　　$a-b=A$とおく＊

$=(A+4)(A-8)$　　公式を用いて展開

$=A^2-4A-32$　　Aを$a-b$にもどす

$=(a-b)^2-4(a-b)-32$　　展開して整理

$=a^2-2ab+b^2-4a+4b-32$

＊共通部分のおきかえ

確認問題 5　次の式を展開して計算しなさい。

- ※□(1)　$(x+5)^2-x(x+8)$
- ※□(2)　$(x-3)(x+9)+x(x-6)$
- ※□(3)　$(x-2)(x-8)-(x-5)^2$
- □(4)　$(x-2)^2-(x+4)(x+1)$
- ※□(5)　$(x-3)(x+8)-(x+4)(x-6)$
- □(6)　$(x-6)^2-x(x-12)$
- □(7)　$x(x-3)+(x-6)(x+9)$
- □(8)　$(x+4)^2-(x+8)(x+2)$
- □(9)　$(x-5)(x-7)-(x-6)^2$
- □(10)　$(x-2)(x-3)-(x-6)(x-1)$
- ※□(11)　$(a+b+1)(a+b-1)$
- □(12)　$(a-b+2)(a-b-2)$
- ※□(13)　$(a+b)(a+b+1)$
- □(14)　$(a-b-2)(a-b+4)$
- ※□(15)　$(a+b+1)^2$
- □(16)　$(a-b-2)^2$
- ※□(17)　$(a+b-3)(a-b-3)$
- □(18)　$(a-b+4)(a+b+4)$
- □(19)　$(a+b+2)^2$
- □(20)　$(a+b+c)(a-b+c)$

例題 2 $x^{\square}$の項の係数

問　$(x^2+x+1)(2x^2-x+4)$　を展開したときの x^2，x の項の係数をそれぞれ求めなさい。

解答　x^2 は$(x^2+x+1)(2x^2-x+4)$　　　x は$(x^2+x+1)(2x^2-x+4)$

x^2 の項の係数は，係数だけ計算すると，$4-1+2=5$

x の項の係数は，$4-1=3$

確認問題 6　次の式を展開したときの，x^2 の係数を求めなさい。

- ※□(1)　$(x^2-x+1)(2x^2+3x-4)$
- □(2)　$(x^2+x-1)(x^2-2x+3)$

練成問題

1 次の計算をしなさい。

※□(1) $(6x-4y)\times 5x$

□(2) $6x\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)$

※□(3) $(8a^2b-12ab^2)\div(-4ab)$

※□(4) $(2a^2-a)\div\frac{1}{2}a$

□(5) $(12a^2b-6ab^2)\div\frac{2}{3}ab$

□(6) $(6a^2b-12ab)\div\left(-\frac{3}{2}b\right)$

2 次の式を展開しなさい。

※□(1) $(a+b)(x+y)$

□(2) $(a-b)(c-d)$

※□(3) $(x^2+x+2)(x-1)$

□(4) $(x^2-2x+1)(x+2)$

※□(5) $(2a+b)(a-2b+1)$

□(6) $(a-3b)(2a+3b+1)$

3 次の式を展開しなさい。

※□(1) $(x+8)(x+12)$

※□(2) $(x-6)(x+2)$

□(3) $(x+10y)(x-5y)$

※□(4) $(x-7)(x-9)$

□(5) $(x+2)(x-9)$

□(6) $(x-3y)(x+12y)$

□(7) $(x+5)(x+7)$

□(8) $(x-4)(x+15)$

□(9) $(x+5y)(x-8y)$

※□(10) $(2x+1)(2x+3)$

□(11) $(2x-5)(2x+3)$

□(12) $(3x+4y)(3x-2y)$

※□(13) $(x+8)^2$

□(14) $(2x+5)^2$

□(15) $(4x-3y)^2$

※□(16) $(x+2)(x-2)$

□(17) $(2x-1)(2x+1)$

□(18) $(3x+7y)(3x-7y)$

4 次の式を展開して計算しなさい。

※□(1) $(x+3)(x-8)-(x-1)(x-4)$

※□(2) $(x-5)^2-(x-9)(x-1)$

□(3) $(x+7)(x-7)-(x-6)(x+8)$

□(4) $(x-6)(x+12)+(x-3)^2$

※□(5) $(x-3y)(x+4y)-(x+3y)^2$

□(6) $(x+y)(x-8y)-(x-4y)(x+2y)$

□(7) $(x-2y)(x-9y)-(x+6y)(x+3y)$

□(8) $(x-2y)^2-(x-6y)(x+2y)$

※□(9) $(a+2b+3)(a+2b-3)$

※□(10) $(a-b-4)(a-b+5)$

※□(11) $(b+c)(a+b+c)$

□(12) $(a-c)(a+b-c)$

※□(13) $(a-b-1)^2$

□(14) $(a+2b+1)(a-2b+1)$

※□(15) $(a+b+c)(a-b-c)$

※□(16) $(a+b-c)(a-b+c)$

5 次の式を展開したときの，〔 〕の係数を求めなさい。

※□(1) $(x-1)(x^3+2x^2+3x+4)$ 〔x^2〕

□(2) $(x^2+2x)(3x^2-4x)$ 〔x^3〕

※□(3) $(3x^2-5x)(x^2+2x+3)$ 〔x^3〕

□(4) $(4x+3)(x^2-6x+5)$ 〔x〕

※□(5) $(x^2+x-1)(x^2+4x-8)$ 〔x^2〕

□(6) $(x^2-2x+3)(x^2-5x-2)$ 〔x^2〕

学習日　　月　　日

2 因数分解

ポイント❶ 因数分解

● 多項式を，より簡単な多項式や単項式の積で表したとき，このより簡単な式を**因数**といい，多項式を因数の積に分解することを**因数分解**という。

例 ① $x^2+3x=x(x+3)$ だから，x，$x+3$ は x^2+3x の因数である。

② $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ だから，$x-1$，$x-2$ は x^2-3x+2 の因数である。

● 因数分解は式の展開の逆の操作である。

$$ac+ad+bc+bd \underset{\text{式の展開}}{\overset{\text{因数分解}}{\rightleftarrows}} (a+b)(c+d)$$

確認問題❶ 次の□にあてはまる正の数を答えなさい。

※□(1) $(x+\square)(x+\square)=x^2+5x+6$

□(2) $(x+\square)(x-\square)=x^2+x-6$

※□(3) $(x-\square)(x+\square)=x^2-2x-8$

※□(4) $(x-\square)(x-\square)=x^2-8x+12$

□(5) $(x+\square)(x-\square)=x^2-7x-18$

□(6) $(x-\square)(x+\square)=x^2+3x-10$

※□(7) $(x+\square)^2=x^2+\square x+9$

□(8) $(x-\square)^2=x^2-\square x+25$

※□(9) $(x+\square)(x-\square)=x^2-16$

□(10) $(x+\square)(x-\square)=x^2-64$

ポイント❷ 共通因数をくくり出す

● 多項式の各項に共通な因数(**共通因数**という)があるとき，それをかっこの外にくくり出して，式を因数分解することができる。

$$\boldsymbol{ma+mb+mc=m(a+b+c)}$$

例 ① $x^2+3xy=x\times x+x\times 3y$
$=x(x+3y)$

② $2ax-6ay=2a\times x-2a\times 3y$
$=2a(x-3y)$

＊ $2ax-6ay$ は，$a(2x-6y)$ としても因数分解したことになるが，かっこの中の式に共通な因数 2 が残っている。例 ②のように，すべての共通因数をくくり出すようにする。

確認問題❷ 次の式を因数分解しなさい。

※□(1) $2x^2+5xy$

□(2) $5ax-10ay$

□(3) $6x^2y+8xy^2$

□(4) $ax+ay-az$

※□(5) $2ma-4mb+6mc$

□(6) $3x^2+6xy-9xz$

□(7) $ab^2c^3-a^2b^3c^4$

※□(8) $36x^3y^4-48x^4y^3$

□(9) $10a^2b-15ab^2+5ab$

□(10) $6a^4-9a^3+15a^2$

※□(11) $4a^3bc-8ab^2c^2+12abc$

□(12) $6x^2yz^2+12xy^2z^3-18x^3yz$

ポイント 3 因数分解の公式

● 乗法公式を利用して，因数分解の公式ができる。

(1) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ 〔$x+a$と$x+b$の積の公式〕

(2) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ 〔和の平方の公式〕

(2)′ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ 〔差の平方の公式〕

(3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 〔和と差の積の公式〕

例 (1)① $x^2+6x+8=(x+\boxed{2})(x+\boxed{4})$ 〔積が 8，和が 6 の 2数を見つける〕

② $x^2-5x+4=(x-\boxed{1})(x-\boxed{4})$ 〔積が 4，和が -5〕

③ $x^2+4x-12=(x+\boxed{6})(x-\boxed{2})$ 〔積が -12，和が 4〕

④ $x^2-x-2=(x-\boxed{2})(x+\boxed{1})$ 〔積が -2，和が -1〕

(2)① x^2+2x+1〔$=x^2+2\times x\times 1+1^2$〕$=(x+1)^2$

② $x^2-8x+16$〔$=x^2-2\times x\times 4+4^2$〕$=(x-4)^2$

③ $4x^2-12x+9$〔$=(2x)^2-2\times(2x)\times 3+3^2$〕$=(2x-3)^2$

(3)① x^2-4〔$=x^2-2^2$〕$=(x+2)(x-2)$

② x^2-9y^2〔$=x^2-(3y)^2$〕$=(x+3y)(x-3y)$

③ $4a^2-b^2c^2$〔$=(2a)^2-(bc)^2$〕$=(2a+bc)(2a-bc)$

確認問題 3 次の□にあてはまる数を答えなさい。

※□(1) $x^2+5x+6=(x+\square)(x+\square)$

※□(2) $x^2+x-6=(x+\square)(x-\square)$

□(3) $x^2+7x+6=(x+\square)(x+\square)$

□(4) $x^2-5x-6=(x+\square)(x-\square)$

□(5) $x^2-x-6=(x+\square)(x-\square)$

※□(6) $x^2-7x+6=(x-\square)(x-\square)$

□(7) $x^2-5x+6=(x-\square)(x-\square)$

□(8) $x^2+5x-6=(x+\square)(x-\square)$

※□(9) $x^2+6x+\square=(x+\square)^2$

□(10) $x^2-10x+\square=(x-\square)^2$

確認問題 4 次の式を因数分解しなさい。

※□(1) x^2+6x+8

□(2) $x^2+9x+18$

□(3) $x^2+15x+50$

※□(4) $x^2+4x-12$

□(5) $x^2+6x-27$

□(6) $x^2+4x-60$

※□(7) $x^2-2x-15$

□(8) $x^2-2x-24$

□(9) x^2-x-42

※□(10) $x^2-8x+12$

□(11) $x^2-10x+24$

□(12) $x^2-11x+24$

※□(13) $x^2+7x-18$

□(14) x^2+x-12

□(15) $x^2+5x-36$

※□(16) $x^2-2x-48$

□(17) x^2-x-72

□(18) x^2-x-90

※□(19) x^2+4x+4

□(20) $x^2-16x+64$

□(21) $x^2+20x+100$

※□(22) $4x^2+12x+9$

□(23) $16x^2-24x+9$

□(24) $9x^2-6x+1$

※□(25) x^2-36

□(26) x^2-64

□(27) x^2-144

※□(28) $4x^2-25y^2$

□(29) $9x^2y^2-1$

□(30) $49x^2-16y^2z^2$

例題 1 因数分解の型(1)　共通因数

問　$3ax^2-12axy+9ay^2$　を因数分解しなさい。

解答
$$
\begin{aligned}
&3ax^2-12axy+9ay^2 && \text{3a でくくる＊}\\
&=3a(x^2-4xy+3y^2) && \text{因数分解の公式}\\
&=3a(x-y)(x-3y)
\end{aligned}
$$

確認問題 5　次の式を因数分解しなさい。

※□(1)　$2ax^2+20ax+48a$　　□(2)　$3ax^2-18ax+27a$　　□(3)　$a^2x^2-a^2$

※□(4)　x^3-9x^2+20x　　□(5)　x^3+8x^2+16x　　□(6)　x^3-x

□(7)　$\frac{1}{8}a^3b+\frac{1}{4}a^2b-ab$　　※□(8)　$a^3b-4a^2b^2+4ab^3$　　□(9)　$x^2(a-b)-y^2(a-b)$

例題 2 因数分解の型(2)　おきかえ

問　次の式を因数分解しなさい。

(1)　$ax-bx-a+b$　　(2)　$x^2-2xy+y^2-2x+2y+1$

解答 (1)
$$
\begin{aligned}
&ax-bx-a+b && \text{部分的に因数分解}\\
&=x(a-b)-(a-b) && a-b=A \text{ とおく＊}\\
&\left(\begin{aligned}&=xA-A\\&=(x-1)A\end{aligned}\right) && A \text{ でくくる}\\
& && A \text{ を } a-b \text{ にもどす}\\
&=(x-1)(a-b)
\end{aligned}
$$

＊慣れたら，おきかえは暗算でやること

(2)
$$
\begin{aligned}
&x^2-2xy+y^2-2x+2y+1 && \text{部分的に因数分解}\\
&=(x-y)^2-2(x-y)+1 && x-y=A \text{ とおく}\\
&\left(\begin{aligned}&=A^2-2A+1\\&=(A-1)^2\end{aligned}\right) && \text{因数分解の公式}\\
& && A \text{ を } x-y \text{ にもどす}\\
&=(x-y-1)^2
\end{aligned}
$$

確認問題 6　次の式を因数分解しなさい。

※□(1)　$(x+y)^2+4(x+y)-12$　　※□(2)　$(x+2)^2-7(x+2)+10$

□(3)　$(a+b)^2+2(a+b)+1$　　□(4)　$(a+b)^2-(c+d)^2$

□(5)　$(x+2)^2-2x-4$　　□(6)　$(x+3)^2+(x+3)-12$

※□(7)　$(a-4)^2-8(a-4)+16$　　※□(8)　$(2a+b)^2-(a-2b)^2$

※□(9)　$x^2-2xy+y^2+2x-2y-24$　　□(10)　$x^2-2xy+y^2-x+y-20$

例題 3 因数分解の型(3) 項の組み合わせ

問 次の式を因数分解しなさい。

(1) $xy-x+y-1$　　(2) x^2-y^2-2x+1　　(3) $x^2+xy-x-2y-2$

解答 (1) $xy-x+y-1$

$=x(y-1)+(y-1)$　　$xy-x$, $y-1$の2項ずつに分け，部分的に因数分解

$=(x+1)(y-1)$　　$y-1$でくくる

(2) x^2-y^2-2x+1

$=x^2-2x+1-y^2$　　x^2-2x+1, $-y^2$の3項，1項に分ける

$=(x-1)^2-y^2$　　部分的に因数分解

$=(x-1+y)(x-1-y)$　　$x-1$をひとかたまりにみて，公式を使う

(3) $x^2+xy-x-2y-2$

$=(x^2-x-2)+(xy-2y)$　　次数の最も低い文字yで整理し，3項，2項に分ける

$=(x-2)(x+1)+(x-2)y$　　部分的に因数分解

$=(x-2)(x+1+y)$　　$x-2$でくくる

確認問題 7 次の式を因数分解しなさい。

※□(1) $ax+bx-ay-by$　　□(2) $xy+x-y-1$

※□(3) $a^2-ab+a-b$　　□(4) $x^2-y^2+2x+2y$

※□(5) $b^2+ab-bc-ac$　　□(6) $x^2-xy+y-1$

※□(7) $a^2-2ab+b^2-1$　　□(8) a^2-b^2-2b-1

※□(9) $x^2+xy-x+y-2$　　□(10) $a^2-ab+a-2b-2$

例題 4 因数分解の型(4) いろいろな出題

問 次の式を因数分解しなさい。

(1) $a^2(b-c)+b^2(c-a)$　　(2) a^4+a^2+1

解答 (1) $a^2(b-c)+b^2(c-a)$

$=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2$　　展開して項の組み合わせへ

$=(a^2b-ab^2)-c(a^2-b^2)$

$=ab(a-b)-c(a+b)(a-b)$

$=(a-b)(ab-ac-bc)$

(2) a^4+a^2+1

$=a^4+2a^2+1-a^2$　　特別な手法

$=(a^2+1)^2-a^2$

$=(a^2+1+a)(a^2+1-a)$

$[=(a^2+a+1)(a^2-a+1)]$

確認問題 8 次の式を因数分解しなさい。

※□(1) $b^2(a-c)-c^2(a+b)$　　※□(2) a^4+4

練成問題

1　次の式を因数分解しなさい。

※□(1)　$8mx-6nx$　　□(2)　$12x^3y^2+18x^2y^3$　　□(3)　$15a^2b-10ab^2+5ab$

□(4)　$3x^4-6x^3+9x^2$　　※□(5)　$2a^2bc-6ab^2c+8abc$　　□(6)　$6x^3y^2+8x^2y^3-10xy^4$

2　次の式を因数分解しなさい。（まず，どの公式を使うかを考えなさい。）

※□(1)　$x^2+3x-18$　　□(2)　$x^2+9x+20$　　□(3)　$x^2-3x-40$

※□(4)　x^2-2x-8　　□(5)　$x^2-15x+56$　　□(6)　x^2+x-30

※□(7)　$x^2+10x+16$　　□(8)　$x^2+5x-24$　　□(9)　$x^2-3x-54$

※□(10)　$x^2+12x+36$　　□(11)　$x^2-18x+81$　　□(12)　$x^2+8x+16$

※□(13)　x^2-1　　□(14)　x^2-169　　□(15)　x^2-225

3　次の式を因数分解しなさい。（まず，どの公式を使うかを考えなさい。）

※□(1)　$x^2+2x-80$　　□(2)　$x^2+16x+64$　　□(3)　x^2+x-42

※□(4)　x^2-9　　□(5)　$x^2+8x+12$　　□(6)　$x^2+2x-15$

※□(7)　$x^2-20x+100$　　□(8)　$x^2+13x+36$　　□(9)　x^2-49

※□(10)　$x^2+6x-16$　　□(11)　$x^2-2x-35$　　□(12)　x^2+6x+9

※□(13)　x^2+x-20　　□(14)　x^2-121　　□(15)　$x^2+3x-10$

4　次の式を因数分解しなさい。（まず，どの公式を使うかを考えなさい。）

※□(1)　x^2-3x-4　　□(2)　$x^2+6x-40$　　□(3)　$x^2-11x+24$

※□(4)　$x^2+15x+54$　　□(5)　x^2+x-72　　□(6)　$x^2-10x-24$

※□(7)　$x^2+6x-72$　　□(8)　x^2+x-90　　□(9)　$x^2+20x+96$

※□(10)　$x^2+12x-45$　　□(11)　$x^2+25x+100$　　□(12)　$x^2-6x-16$

※□(13)　$x^2-9x-36$　　□(14)　$x^2+2x-48$　　□(15)　$x^2-5x-36$

5　次の式を因数分解しなさい。

※□(1)　$8x^3-2x$　　□(2)　x^4-x^2　　□(3)　$3x^3y-12xy^3$

※□(4)　$4x^2+32x+64$　　□(5)　$3ab^3-36ab^2+108ab$　　□(6)　$8a^3+24a^2b+18ab^2$

※□(7)　$5x^3+10x^2-240x$　　□(8)　$6x^3+6x^2-36x$　　□(9)　$2x^2y-2xy-4y$

□(10)　$\frac{1}{2}x^2+2x-6$　　□(11)　$-x^2+2x+3$　　□(12)　$\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}$

※□(13)　$a^2(x-y)-x+y$　　□(14)　$a^2(x-y)+b^2(y-x)$　　□(15)　$a^2(a-b)+b^2(b-a)$

6 次の式を因数分解しなさい。

※□(1) $(x+2)(x-3)+2(x+2)$
□(2) $(2x+3)(x-4)-(x-4)^2$
※□(3) $(a+b)^2+2(a+b)-15$
□(4) $(a-2b)^2-2a+4b-24$
※□(5) $(x-5)^2+3(x-5)-28$
□(6) $(x-2)^2-x+2-12$
※□(7) $a^2+2ab+b^2-a-b-2$
□(8) $a^2-a+2ab-b+b^2-6$
※□(9) $(a-b)(a-b+2)-8$
□(10) $(a+b)(a+b-4)+4$

7 次の式を展開しなさい。

※□(1) $(x+y-6)(x+y+12)$
□(2) $(a-b+ab)(a-b+2)$
※□(3) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$
□(4) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$
※□(5) $(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)$
□(6) $(x+2)(x+3)(x-4)(x-6)$
※□(7) $(a-1+b+c)(a-1-b-c)$
□(8) $(ab-1+a+b)(ab-1-a-b)$
※□(9) $(a+b)^2(a-b)^2$
□(10) $(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

8 次の式を因数分解しなさい。

※□(1) $ax-a+bx-b$
□(2) $ab-bc+ad-cd$
□(3) $ac+2b-ab-2c$
※□(4) $xy-x-y+1$
□(5) $xy-2x+y-2$
□(6) $xy+3x-2y-6$
※□(7) $a^2-2ab-a+2b$
□(8) $a^2-2a+2b-ab$
□(9) $a^2-bc+ab-ac$
※□(10) a^2+2a-b^2+2b
□(11) $a^2-b+ab-1$
□(12) a^2+bc-b^2+ac
※□(13) a^2+ab-c^2-bc
□(14) $ab+c^2-b^2-ac$
□(15) a^2-bc-b^2+ac

9 次の式を因数分解しなさい。

※□(1) $x^2+2xy+y^2-4$
□(2) x^2-y^2+4x+4
□(3) $x^2-4+4y-y^2$
※□(4) x^2y-x^2-4y+4
□(5) x^2y+4x^2-y-4
□(6) xy^2-4x+y^2-4
※□(7) $a^2-4b^2-12b-9$
□(8) $a^2+4b^2-4ab-9$
□(9) $a^2+12b-4b^2-9$
※□(10) ab^2-9+b^2-9a
□(11) $ab^2+9-a-9b^2$
□(12) a^2b+9-a^2-9b
※□(13) $x^3+y^2z-xy^2-x^2z$
□(14) x^3+x^2y-x-y
□(15) $x^3-x^2y-xy^2+y^3$

10 次の式を因数分解しなさい。

※□(1) $x(x+5)-6$
□(2) $(x+2)(x+3)-2$
※□(3) $a^2(b+c)+b^2(a-c)$
□(4) $a^2(b+c)-c^2(a+b)$
※□(5) x^4-1
□(6) a^4-2a^2+1
※□(7) x^4-5x^2+4
□(8) a^8-b^8
※□(9) $(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24$
□(10) $(x^2-12)^2-5x(x^2-12)+4x^2$

発展問題

1 次の式を因数分解しなさい。

※□(1) $x^2-2x-48$
□(2) $x^2+4x-45$
□(3) $x^2+22x-48$
※□(4) $x^2+32x+60$
□(5) $x^2-16x+48$
□(6) $x^2-20x+75$
※□(7) $x^2+13x-48$
□(8) $x^2+9x-90$
□(9) $x^2+40x+144$
※□(10) $x^2+17x+60$
□(11) $x^2+14x+48$
□(12) $x^2-30x+56$
※□(13) $x^2-26x+48$
□(14) $x^2+22x+120$
□(15) $x^2+8x-48$
※□(16) $x^2-25x+100$
□(17) $x^2+19x+48$
□(18) $x^2+27x+50$
※□(19) $x^2-20x-96$
□(20) $x^2-10x-75$
□(21) $x^2-14x+48$
※□(22) $x^2+11x-60$
□(23) $x^2-22x-48$
□(24) $x^2-7x-60$
※□(25) $x^2-8x-48$
□(26) $x^2-14x+45$
□(27) $x^2-13x-48$
※□(28) $x^2+2x-120$
□(29) $x^2+32x-144$
□(30) $x^2+15x-100$

2 次の式を因数分解しなさい。

※□(1) $x^2-(a+b)x+ab$
□(2) $x^2-(a-b)x-ab$
※□(3) $x^2+(a-2)x-2a$
□(4) $x^2-(a-3)x-3a$
※□(5) $x^2+(2a-1)x+a(a-1)$
□(6) $x^2+x-a(a+1)$
※□(7) $x^2+2ax+(a+1)(a-1)$
□(8) $x^2+x-a(a-1)$
※□(9) $x^2+3ax+(2a-1)(a+1)$
□(10) $x^2+ax-(2a-1)(a-1)$

3 次の式を因数分解しなさい。

※□(1) $ab^2c-2abc^2+ab^3$
□(2) $abc^2+2a^2bc+a^3b$
※□(3) $x^2(x-2)+4(2-x)$
□(4) $(x+2)^3-(x+2)^2$
※□(5) $(x-2)^3-(x-2)^2-2(x-2)$
□(6) $(x-2)^3+2-x$
※□(7) $(x-1)x^2-2(x-1)x+x-1$
□(8) $(x+a)(x^2-ax+a^2)+3ax^2+3a^2x$
※□(9) $(a+b)c^2+(a+b)^2c+a^2b+ab^2$
□(10) $-(b-c)a^2+(b^2-c^2)a-(b^2c-bc^2)$

4 次の式を因数分解しなさい。

※□(1) $(x-y)(x-y-6)-16$
□(2) $(x+y-1)^2+(x+y)-3$
※□(3) $(x^2-3x)(x^2-3x-2)-8$
□(4) $(x-y)^2-2(x-y+3)-9$
※□(5) $(x-5)^2+2(x-5)-24$
□(6) $(x+6)^2-4(x+6)-32$
※□(7) $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$
□(8) $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3$
※□(9) $(x^2+5x)(x^2+5x+10)+24$
□(10) $(x^2+2x-4)(x^2+x-4)-2x^2$

5 次の各問いに答えなさい。

※□(1) $x-y=10$ のとき，$\dfrac{x^2+y^2}{2}-xy$ の値を求めなさい。
□(2) $A=a+2b-3$，$B=a-2b+3$ のとき，A^2-B^2 を計算しなさい。
□(3) $2x+y=x+3y$ のとき，$x^2-xy-2y^2$ の値を求めなさい。
□(4) 2次式 $x^2+10x+n$ が整数の範囲で因数分解できるような自然数 n をすべて求めなさい。
□(5) n を自然数とするとき，$n^2+6n-27$ が素数になるという。この素数はいくつになるか求めなさい。

6 次の文を読んであとの式を因数分解しなさい。

高校入試で扱われる因数分解には，公式を利用するものや共通因数でくくるもの，式の一部を別の文字でおきかえるもののほかに，項の組み合わせを考えて部分的にまとまりを作りながら全体を因数分解する問題がよく出される。出題を調べてみると，次のようなタイプのものが目立った。

〔1〕 $ac+ad+bc+bd=(a+b)(c+d)$ の型
〔2〕 $xy+\beta x+\alpha y+\alpha\beta=(x+\alpha)(y+\beta)$ の型
〔3〕 $a^2+ac+ab+bc=(a+b)(a+c)$ の型
〔4〕 $x^2+ax-y^2+ay=(x+y)(x-y+a)$ の型
〔5〕 $ax^2-ay^2+bx^2-by^2=(a+b)(x+y)(x-y)$ の型
〔6〕 $a^2+2ab+b^2-c^2=(a+b+c)(a+b-c)$ の型

※□(1) $ab-cx-ac+bx$
□(2) $ax+2y-x-2ay$
□(3) $x^3-x^2y+xy^2-y^3$
※□(4) $ab-4a-b+4$
□(5) $2xy+2-x-4y$
□(6) $3ab+2-3a-2b$
※□(7) $ab-bc-b^2+ac$
□(8) $a-ab+b-a^2$
□(9) $x^2-2y-x+2xy$
※□(10) $a^2-b^2+bc-ac$
□(11) x^2-x-y^2-y
□(12) $9x^2+3xy-y-1$
※□(13) $a^3-a+b-a^2b$
□(14) $a^2b-b^3-a^2+b^2$
□(15) $a^3-b^3+a^2b-ab^2$
※□(16) $a^2-9-2ab+b^2$
□(17) x^2-y^2+2y-1
□(18) $4x^2-4xy+y^2-z^2$
※□(19) $a^4-b-a^2b+a^2$
□(20) $a+a^2c-bc-abc^2$
□(21) x^2-2x-y^2+1
※□(22) $2bc-a^2+ac+4b^2$
□(23) $4x^2-y^2-12x+9$
□(24) $a^3-a^2b-ab^2+b^3$
※□(25) $9a^2+4bc-b^2-4c^2$
□(26) $a^2b-a^2-4bc^2+4c^2$
□(27) $xy-3x-4y+12$
※□(28) $9a^2+3ab-b-1$
□(29) $4x+2y-8xy-1$
□(30) $x^2-y^2+2yz-z^2$

7 次の式を因数分解しなさい。

※□(1) $x^4+2x^3y-2xy^3-y^4$
□(2) $x^4-2x^3y+2xy^3-y^4$
※□(3) $x^4+x^3+x^2y+xy^2+y^3-y^4$
□(4) $x^4-x^3+x^2y-xy^2+y^3-y^4$
※□(5) $(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)-3x^2y^2$
□(6) $(ab+1)^2-(a+b)^2$
※□(7) $a^2b^2-a^2-b^2-4ab+1$
□(8) $a^2-b^2-c^2-2a-2bc+1$
※□(9) $a^4-3a^2-2ab+1-b^2$
□(10) $a^4+a^2+1-2ab-b^2$

学習日　　月　　日

8　2次方程式の解と応用

例題 1　解の1つが与えられて，係数，定数や他の解を求める

問　2次方程式 $3x^2+ax+a=0$ の解の1つが2であるとき，a の値を求めなさい。また，もう1つの解を求めなさい。

解答　$x=2$ を代入して，$3\times2^2+2a+a=0$

これを解いて，$a=-4$

すると，2次方程式は　$3x^2-4x-4=0$　となる。

解の1つが $x=2$ だから，左辺を因数分解すれば　$x-2$ という因数ができるので，

$$3x^2-4x-4=(x-2)(3x+\square)$$

となる。$\square=2$ となり，もう1つの解は $x=-\frac{2}{3}$ である。

もう1つの解を求めるには，単純に $3x^2-4x-4=0$ を解いてもよい。

解の公式を使うと，$x=\frac{4\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{4\pm8}{6}$，つまり2と $-\frac{2}{3}$

よって，もう1つの解は $x=-\frac{2}{3}$

＊解答の中で，他の解を b とおいて，$3x^2-4x-4=3(x-2)(x-b)$ とかき，右辺を展開して，

$3x^2-3(2+b)x+6b$，これを左辺と比べて，$b=-\frac{2}{3}$ が求まる。

ただし，このとき，$3x^2-4x-4=(x-2)(x-b)$ とはできないので，要注意。

確認問題 1　次の各問いに答えなさい。

※□(1)　2次方程式　$3x^2+ax-8=0$　の解の1つが2であるとき，a の値を求めなさい。
また，他の解を求めなさい。

□(2)　2次方程式　$x^2-ax-2a=0$　の解の1つが -1 であるとき，a の値を求めなさい。
また，もう1つの解を求めなさい。

※□(3)　2次方程式　$2x^2-(k+1)x-3k-5=0$　の1つの解が k であるとき，k の値を求めなさい。
また，他の解を求めなさい。

□(4)　x についての2次方程式　$3x^2+4x+a^2+1=0$　の解の1つが a であるという。
a の値と他の解を求めなさい。

確認問題 2 次の(1)は　$3x^2+8x-16=0$ という2次方程式の1つの解が-4であることがわかったとして，$3x^2+8x-16$ を因数分解せよ，という問題である。

同じように考えて，それぞれ因数分解しなさい。

※□(1)　$3x^2+8x-16$　〔-4〕　　□(2)　$6x^2-7x-10$　〔2〕

※□(3)　$8x^2-2x-3$　$\left(-\dfrac{1}{2}\right)$　　□(4)　$12x^2-x-6$　$\left(-\dfrac{2}{3}\right)$

例題 2 数に関する応用問題(1)

問　連続する5個の正の整数がある。小さい方から3数の平方の和は，残りの2数の平方の和に等しい。これらの5個の正の整数を，小さい方から順に並べて答えなさい。

解答　5個の連続整数を　$x-2$，$x-1$，x，$x+1$，$x+2$　とすると，

$$(x-2)^2+(x-1)^2+x^2=(x+1)^2+(x+2)^2$$

という方程式ができる。

これを展開して整理すると，$x^2-12x=0$

すると，$x(x-12)=0$　より，$x=0$，12

しかし，5個の整数は正でなければならないから，$x=0$ は不適当。

$x=12$ の方は，$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2(=365)$となり，適する。

（答え）10，11，12，13，14

解説　5個の連続整数は，x，$x+1$，$x+2$，$x+3$，$x+4$ としてもかまわないが，上の解答のようにやる方が計算が楽になることが多い。

3個の連続整数なら，$x-1$，x，$x+1$，または，x，$x+1$，$x+2$ とおく。

なお，連続偶数や連続奇数の問題では，$2x$，$2(x+1)$，……　とか，$2x-1$，$2x+1$，……などとおくこともあるが，どちらも　x，$x+2$，……とおけば充分な場合が多い。

＊文章題では(2次方程式に限らず)次の4項目がポイントになる。

① 文章題の中の，何を未知数 x とするか

② どんな関係で関係式をつくるか

③ つくった関係式をどのように解くか

④ 求めた解が，文章題の答えとして適しているかどうか

＊2次方程式では，とくに④の検討が重要である。

※**確認問題 3** 連続する3つの偶数がある。その中で，いちばん小さい数とまん中の数のそれぞれの2乗の和は，いちばん大きい数の14倍より4だけ小さい。

このとき，3つの偶数を求めなさい。

□

例題 ❸ 数に関する応用問題(2)

問　差が 13，積が 48 となる 2 数を求めなさい。

解答　2 数の一方を x，他方を $x+13$ とすると，$x(x+13)=48$

これを変形して整理すると，$x^2+13x-48=0$

すると，　$(x+16)(x-3)=0$　より　$x=-16,\ 3$

これより，-16 と -3，または，3 と 16 の 2 組の解が出てくるが，これらはともに答えとして適している。

（答え）-16 と -3，　3 と 16

解説　2 数を x，y とおいて，

$$\begin{cases} x-y=13 \\ xy=48 \end{cases}$$

という連立方程式をつくってこれを解く方法もある。

確認問題 ❹　次の各問いに答えなさい。

※□(1)　ある正の数に，2 を加えてから 2 乗するところを，2 を加えてから誤って 2 倍したため，正しい答えより 48 小さくなった。
はじめの正の数を求めなさい。

□(2)　ある正の整数 x の 2 乗を，x より 4 大きい数で割ると商が 3 で余りが 6 になる。
このとき，ある正の整数を求めなさい。

□(3)　ある数に 2 を加えて 2 乗した数は，ある数に 6 をかけて 7 を加えた数と等しい。
このとき，ある数を求めなさい。

□(4)　ある数に 8 を加えて 2 乗するところを，まちがえて 8 倍してから 2 を加えたので，正しい答えよりも 46 小さくなった。
このとき，ある数を求めなさい。

□(5)　差が 2 である 2 つの自然数があり，それぞれを 2 乗した数の和が 74 である。
このとき，2 つの自然数を求めなさい。

□(6)　差が 3 である 2 つの自然数がある。この 2 数の 2 乗の和は，2 数の積より 63 大きい。
このとき，2 つの自然数を求めなさい。

例題 4 数列に関する応用問題

問1　n は自然数とする。1 から n までの連続する n 個の自然数の和が 120 であるとき，n の値を求めなさい。

解答　1 から n までの和を求める式に，順序を逆にした式を加える。

$$
\begin{array}{r}
1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n = 120 \\
+\quad n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 = 120 \\
\hline
(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1) = 240
\end{array}
$$

左辺は n 個の $(n+1)$ の和だから，$(n+1)\times n=240$ という方程式ができる。

これを展開して整理すると，$n^2+n-240=0$，$(n+16)(n-15)=0$，$n=-16,\ 15$

n は自然数だから，$n=15$　　（答）　$n=15$

解説　n を自然数とするとき，1 から n までの連続する n 個の自然数の和は，$\dfrac{1}{2}n(n+1)$ となる。

問2　x を正の奇数とする。$1+3+5+\cdots+(x-2)+x$　と，1 から x までの連続する奇数の和が 225 になるとき，x の値を求めなさい。

解答　n を自然数として，$x=2n-1$ とおく。

1 から $2n$ までの $2n$ 個の自然数の和は，

$1+2+3+\cdots+(2n-2)+(2n-1)+2n=\dfrac{1}{2}\times 2n(2n+1)=2n^2+n$

また，2 から $2n$ までの n 個の偶数の和は，

$2+4+6+\cdots+(2n-2)+2n=2\{1+2+3+\cdots+(n-1)+n\}=2\times\dfrac{1}{2}n(n+1)=n^2+n$

よって，1 から $(2n-1)$ までの n 個の奇数の和は，

$1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=(2n^2+n)-(n^2+n)=n^2$

これが 225 になるから，$n^2=225$　$n=\pm 15$

n は自然数だから，$n=15$

よって，$x=2n-1=2\times 15-1=29$　　（答）　$x=29$

解説　n を自然数とするとき，

○ 2 から $2n$ までの連続する n 個の偶数の和は，$n(n+1)$ となる。

○ 1 から $(2n-1)$ までの連続する n 個の奇数の和は，n^2 となる。

確認問題 5　次の各問いに答えなさい。

□(1)　n は自然数とする。1 から n までの連続する n 個の自然数の和が 325 であるとき，n の値を求めなさい。

□(2)　x を正の偶数とする。$2+4+6+\cdots+(x-2)+x$　と，2 から x までの連続する偶数の和が 272 になるとき，x の値を求めなさい。

□(3)　x を正の奇数とする。$1+3+5+\cdots+(x-2)+x$　と，1 から x までの連続する奇数の和が 900 になるとき，x の値を求めなさい。

例題 5　図形に関する応用問題(1)

問　対角線の本数が 14 本である多角形は何角形か求めなさい。

解答　n を 3 より大きい自然数とする。

　n 角形の 1 つの頂点からひくことができる対角線の本数は $(n-3)$ 本で，重複して数える対角線を除くと，n 角形の対角線の本数は，$\frac{1}{2}n(n-3)$ 本と表される。これが 14 本あるとき，

$\frac{1}{2}n(n-3)=14$　これを整理すると，$n^2-3n-28=0$，$(n+4)(n-7)=0$，$n=-4,\ 7$

$n>3$ であるから，$n=7$　　　　（答）　七角形

確認問題 6　次の各問いに答えなさい。

□(1)　対角線の本数が 20 本である多角形は何角形か求めなさい。

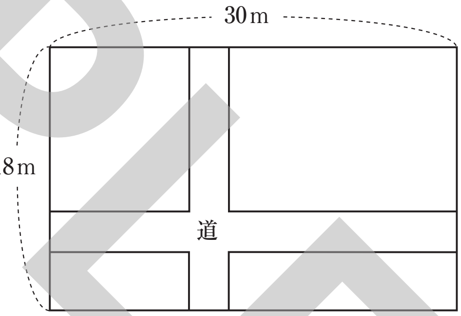
□(2)　対角線の本数が 54 本である多角形は何角形か求めなさい。

例題 6　図形に関する応用問題(2)

問 1　2 辺の長さが 18m，30m の長方形の畑がある。これに右の図のように，縦と横に同じ幅の道を作り，残った畑の面積がもとの畑の 80%になるようにしたい。

　道幅はどれだけにしたらよいか。

　また，$\sqrt{13}=3.6$ として，この道幅の長さの近似値を計算しなさい。



解答　道幅を xm とする。道の位置にかかわらず，道以外の残る畑の面積は，縦 $18-x$(m)，横 $30-x$(m) の長方形と等しい。

　すると，次の関係式ができる。

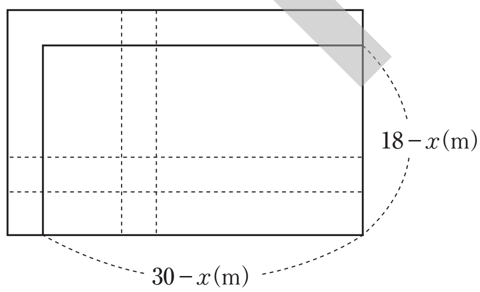
　$(18-x)(30-x)=18\times30\times0.8$

　整理すると，$x^2-48x+108=0$

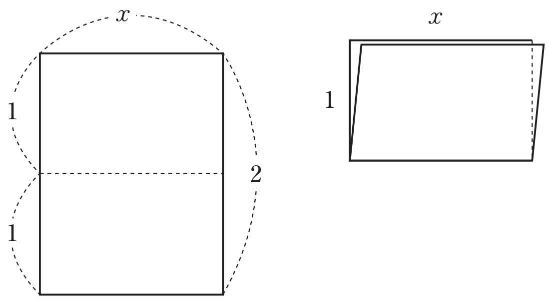
　これを解くと，$x=24\pm6\sqrt{13}$

　$x<18$　だから，道幅は $24-6\sqrt{13}$(m)

　近似値は　$24-6\times3.6=2.4$(m)



問2　私たちがふだん使うA4，A5版の紙や，B4，B5版の紙は，右図のように折り曲げても，もとの長方形の縦と横の割合と等しくなる。



⑴　右図のように，長方形の2辺を2とxとするとき，xに関する関係式をつくりなさい。

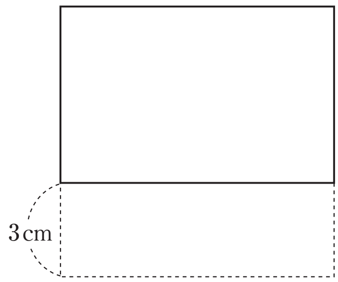
⑵　長方形の2辺の比を求めなさい。

解答 ⑴　長い辺と短い辺の比を比べると，$2:x = x:1$
したがって，$x^2 = 2$

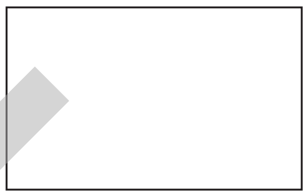
⑵　⑴を解くと，$x = \pm\sqrt{2}$　　$x > 0$より$x = \sqrt{2}$
すると，2辺の比は$2:\sqrt{2}$　（または，$\sqrt{2}:1$でもよい）

確認問題 7　次の各問いに答えなさい。

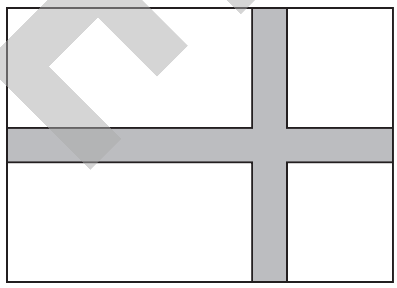
※□⑴　縦が横より3cm短い長方形がある。縦の長さを2倍にして，横の長さは2cm短くしたら，面積は2cm^{2}増加したという。もとの長方形の縦の長さを求めなさい。



□⑵　周囲の長さが20cmで，面積が16cm^{2}の長方形の短い方の1辺は何cmか。



※□⑶　縦16m，横24mの長方形の土地に，図のように同じ幅の道路をつけて，道路の面積が76m^{2}になるようにしたい。
道路の幅を何mにすればよいか。



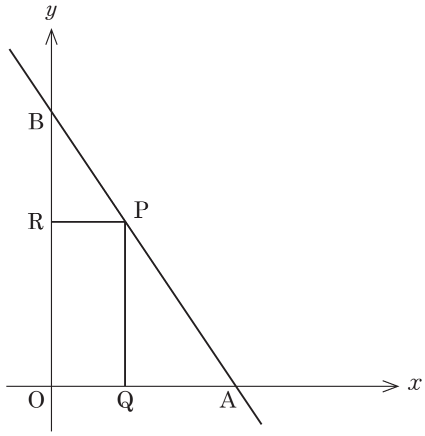
例題 7 動点に関する応用問題

問　**座標平面上に点 A(20, 0)，B(0, 30) があり，直線 AB 上に点 P をとって長方形 ROQP を図のように作る。点 P の x 座標を a $(0<a<20)$ とするとき，**

(1)　点 P の y 座標を a を用いて表しなさい。

(2)　座標の 1 目もりを 1 cm とする。長方形 ROQP の面積が $96\,\mathrm{cm}^2$ となる a の値を求めなさい。

(3)　長方形 ROQP の面積が三角形 ABO の $\frac{1}{2}$ となるときの a の値を求めなさい。



解答 (1)　直線 AB の式は $y=-\frac{3}{2}x+30$ だから，点 P の y 座標は $-\frac{3}{2}a+30$

(2)　長方形の面積は　$a\left(-\frac{3}{2}a+30\right)\mathrm{cm}^2$　　これが $96\,\mathrm{cm}^2$ だから

$$a\left(-\frac{3}{2}a+30\right)=96$$

整理すると，$a^2-20a+64=0$　　よって，$(a-4)(a-16)=0$

これを解くと，$a=4$，16

これらはどちらも解として適している。　　（答え）$a=4$，16

(3)　関係式は　$a\left(-\frac{3}{2}a+30\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 20\times 30$

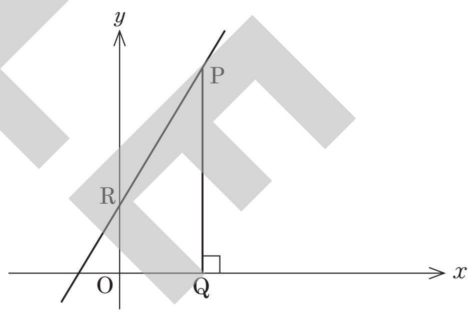
整理すると，$a^2-20a+100=0$　　よって，$(a-10)^2=0$

これを解くと，$a=10$

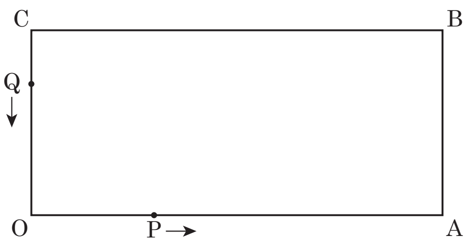
これは，解として適している。　　（答え）$a=10$

確認問題 8　次の各問いに答えなさい。

※□(1)　図のように，直線 $y=2x+3$ 上の点 P から x 軸に下ろした垂線を PQ とし，直線と y 軸の交点を R とする。台形 OQPR の面積が 54 となるときの点 Q の x 座標を求めなさい。



※□(2)　長方形 OABC で，OA = 20 cm，OC = 10 cm である。この長方形の周上を，点 P は O を出発して毎秒 2 cm，点 Q は点 P と同時に C を出発して毎秒 1 cm の速さでそれぞれ矢印の方向に動くものとする。P が A に到着するまでの間で，三角形 OPQ の面積が $16\,\mathrm{cm}^2$ になるのは何秒後か。



例題 8 物の落下に関する応用問題

問　物を秒速 vm で真上に投げ上げると，投げてから t 秒後に物の高さはおよそ $h=vt-5t^2$ (m) になるという。

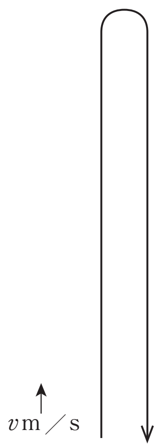
いま，秒速 $v=20$ (m／s) でボールを真上に投げ上げるとき，

(1)　はじめの位置に戻ってくるのは何秒後か。

(2)　最高点に達するのは何秒後か。

(3)　最高点に達したときの高さは何 m か。

(4)　高さが 15m になるのは何秒後か。



解答 (1)　$v=20$，$h=0$ とすると，

$0=20t-5t^2$

これを解いて，$t=0$，4　（答え）4 秒後

(2)　4 秒の中間だから 2 秒後　（答え）2 秒後

(3)　$v=20$，$t=2$ とすると，

$h=20\times2-5\times2^2=20$　（答え）20m

(4)　$v=20$，$h=15$ とすると，

$15=20t-5t^2$

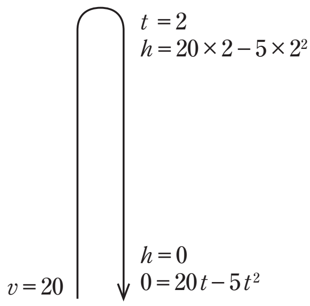
よって，$t^2-4t+3=0$

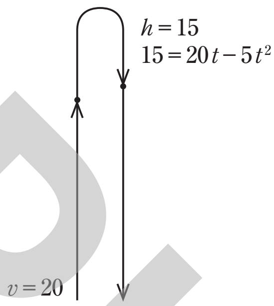
これは，$(t-1)(t-3)=0$

これを解いて，$t=1$，3

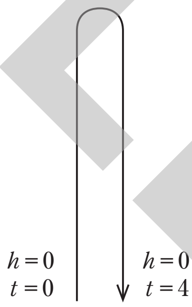
どちらも解として適している。

（答え）1 秒後と 3 秒後





＊(1)は $t=0$，4 と 2 つの解が出てきたが，$t=0$ は $v=20$，$h=0$ の条件のもとで，真上に投げ上げるはじめの時点にあたる。これは解として適さないので，答えは $t=4$ の方だけになる。



確認問題 9　例題 8 で，初速 $v=30$ (m／s) でボールを真上に投げ上げるとき，

※□(1)　はじめの位置に戻ってくるのは何秒後か。

□(2)　最高点に達するのは何秒後か。

※□(3)　最高点に達したときの高さは何 m か。

※□(4)　高さが 25m になるのは何秒後か。

練成問題

1 次の(1)は，$x^2-20x+64=0$ という2次方程式の1つの解が4であることがわかったとして，$x^2-20x+64$ を因数分解しなさい，という問題である。

同じように考えて，おのおの因数分解しなさい。

✽□(1) $x^2-20x+64$ 〔4〕

□(2) $x^2-20x+96$ 〔8〕

✽□(3) $x^2-30x+216$ 〔12〕

□(4) $x^2-40x+375$ 〔15〕

✽□(5) $2x^2-3x-2$ 〔2〕

□(6) $3x^2-7x-6$ 〔3〕

✽□(7) $4x^2-8x+3$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

□(8) $6x^2-x-2$ $\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

✽□(9) $12x^2+4x-5$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

□(10) $9x^2+6x-8$ $\left[\dfrac{2}{3}\right]$

2 次の各問いに答えなさい。

✽□(1) 2次方程式 $ax^2-5x-3=0$ の1つの解が3であるとき，a の値と他の解を求めなさい。

□(2) x の2次方程式 $x^2-mx+m-9=0$ の解の一方が -1 であるという。m の値と他の解を求めなさい。

□(3) x の2次方程式 $x^2-2ax+3a=0$ の1つの解が2のとき，a の値と他の解を求めなさい。

□(4) x の2次方程式 $x^2-px+3p=0$ の1つの解が2のとき，p の値と他の解を求めなさい。

✽□(5) x の2次方程式 $x^2-(2m-1)x+m^2-5=0$ の解の一方が $x=1$ であるという。m の値と他の解を求めなさい。

□(6) x の2次方程式 $x^2+(a-8)x+a^2-a=0$ の解の1つが $x=2$ であるという。a の値と他の解を求めなさい。

✽□(7) $x^2-2x+a=0$ の解の1つが $x=1-\sqrt{3}$ のとき，a の値と他の解を求めなさい。

□(8) $x^2+mx-1=0$ の解の1つが $x=2+\sqrt{5}$ のとき，m の値と他の解を求めなさい。

✽□(9) $4x^2-5x+p+1=0$ は，$x=p$ を解にもつという。このとき，p の値を求めて，この2次方程式を解きなさい。

□(10) $x^2-ax+3=0$ の1つの解が $\dfrac{a}{2}+1$ であるとき，a の値と2次方程式の解を求めなさい。ただし，$a>0$ とする。

3 次の各問いに答えなさい。

□(1) ある数とその数の平方との和は 72 であるという。ある数を求めなさい。

✽□(2) 2 つの整数があって，その差は 12，積は -32 である。
この 2 つの整数を求めなさい。

□(3) ある自然数を 2 乗すると，もとの数の 3 倍より 18 大きくなるという。
このある自然数を求めなさい。

✽□(4) ある数を 2 乗するところを，誤って 2 倍したため，答えが 63 小さくなった。
この数を求めなさい。

✽□(5) 連続する 3 つの自然数がある。最小の自然数と最大の自然数の積は，中央の自然数の 6 倍より 15 大きいという。これらの 3 つの自然数を求めなさい。

✽□(6) 連続する 3 個の偶数がある。小さい 2 数の積は，残りの数の 3 倍に等しい。
これら 3 個の偶数を求めなさい。

□(7) 連続する 3 個の奇数がある。小さい 2 数の積は 3 数の和に等しい。
これら 3 個の奇数を求めなさい。

□(8) 連続する 3 個の整数で，小さい方の 2 数の平方の和と，残りの数の平方が等しくなった。これら 3 数の組を，すべて求めなさい。

□(9) n は自然数とする。1 から n までの連続する n 個の自然数の和が 630 であるとき，n の値を求めなさい。

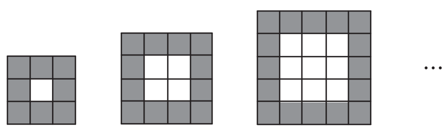
□(10) x を正の奇数とする。$11+13+15+\cdots+(x-2)+x$ と，11 から x までの連続する奇数の和が 375 になるとき，x の値を求めなさい。

□(11) 2 つの数があって，その和は 6，積は 7 である。この 2 つの数を求めなさい。

✽□(12) カレンダーに並んでいる同じ曜日の上下の数の積が 330 になった。この 2 数を求めなさい。

S	M	T	W	T	F	S
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

□(13) 右の図のように，白と黒の正方形のタイルを規則的に並べていく。白のタイルが黒のタイルよりも 73 枚多くなるのは何番目の図形か，求めなさい。



1 番目　2 番目　3 番目

4 次の各問いに答えなさい。

□(1) 対角線の本数が 90 本である多角形は何角形か求めなさい。

✽□(2) 周囲の長さが 20 cm，面積が 24 cm^2 の長方形の 2 辺の長さはそれぞれ何 cm か。

✽□(3) 縦 8 cm，横 10 cm の長方形の 2 辺を x cm ずつ短くしたら，面積が 35 cm^2 になった。
x の値を求めなさい。

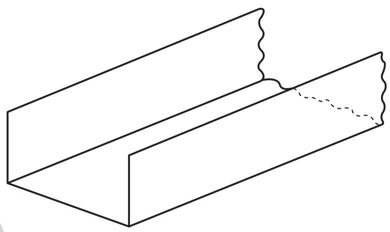
□(4) 長さ 36 cm の針金を 2 つに切って折り曲げて正方形を作ったら，2 つの正方形の面積の和が 45 cm^2 になった。2 つに切った針金のそれぞれの長さを求めなさい。

✽□(5) 底辺が高さより 1 cm 長く，面積が 28 cm^2 の三角形がある。この三角形の底辺は何 cm か。

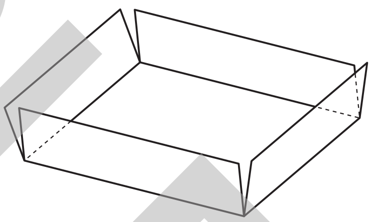
□(6) 面積が 30 cm^2 の直角三角形がある。直角をはさむ 2 辺の長さの差が 4 cm のとき，この 2 辺の長さを求めなさい。

□(7) 下底が上底より 4 cm 長く，高さは上底より 1 cm 長く，面積が 30 cm^2 の台形がある。
この台形の下底を求めなさい。

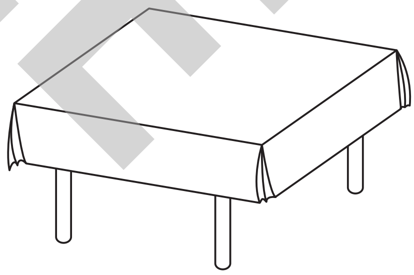
□(8) 幅 28 cm のトタン板を図のように折り曲げて，切り口が面積 96 cm^2 の長方形のといを作った。
といの高さを求めなさい。



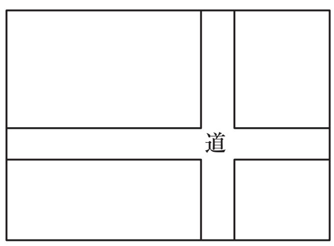
✽□(9) 縦 12 cm，横 18 cm の長方形の厚紙の 4 すみから，1 辺が x cm の正方形を切りとって，底面積が 72 cm^2 の直方体の容器を作った。この容器の容積はいくらか。



□(10) 縦 80 cm，横 120 cm のテーブルに，面積が 2 倍の長方形のテーブルかけをかけて各辺とも同じ長さだけたれ下がるようにしたい。テーブルかけの 2 辺をそれぞれ何 cm にすればよいか。

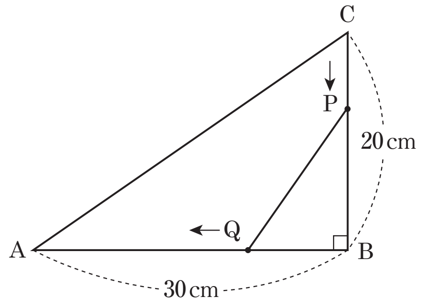


✽□(11) 2 辺が 10 m，12 m の長方形の畑に，右の図のような幅が一定の道をつけ，残りの畑の面積をもとの $\frac{2}{3}$ としたい。道幅を何 m にしたらよいか。

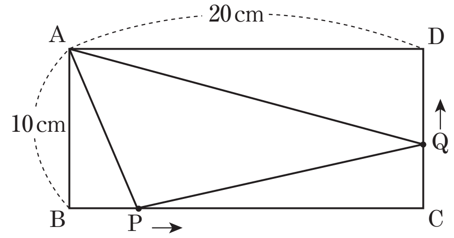


5 次の各問いに答えなさい。

※□(1) 右の図の直角三角形 ABC で，P は毎秒 2cm の速さで C から B まで動き，Q は毎秒 3cm の速さで B から A まで動く。P，Q は同時に出発するとき，△PBQ の面積が 48cm^2 になるのは何秒後か。



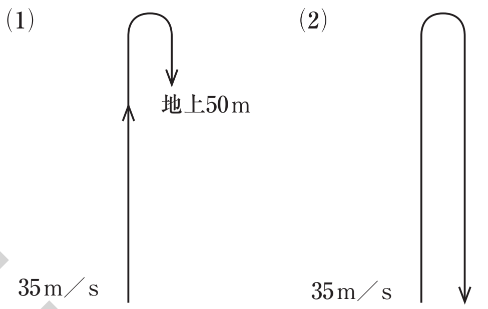
□(2) 右の図のような，縦 10cm，横 20cm の長方形がある。P は B から C へ，Q は C から D へ，同時に出発して毎秒 1cm の速さで動くとき，△APQ の面積が 88cm^2 になるのは何秒後か。
10 秒までの範囲で考えなさい。



6 **地上から初速 vm／s で真上に投げ上げた物体の t 秒後の高さはおよそ $h=vt-5t^2$(m)，また，高い所から初速 0 で物体が落ちるときの t 秒間に落ちた距離はおよそ $h=5t^2$(m) と表される。**
これらを使って，次の各問いに答えなさい。

※□(1) 秒速 35m で投げ上げた物体の高さが地上 50m になるのは，投げ上げてから何秒後か。

※□(2) 秒速 35m で投げ上げた物体が地上に落ちるのは，投げ上げてから何秒後か。



※□(3) 井戸の中に石を落としたところ，$\frac{35}{17}$秒後に音が聞こえた。石が水面に着くまでの時間と水面までの距離を求めなさい。
ただし，音の速さは毎秒 340m とする。

□(4) 井戸の中に石を落としたところ，$\frac{33}{16}$秒後に音が聞こえた。石が水面に着くまでの時間と水面までの距離を求めなさい。
ただし，音の速さは毎秒 320m とする。