

本書の特色と構成

このテキストは、これから学習していく高校数学のうち、「数学Ⅰ」の最初の単元を扱った教材です。「数と式」「方程式と不等式」は、中学で学習した「展開・因数分解」「平方根」「方程式」などが基礎となっていますので、中学の延長として、容易に高校数学の内容に入っていくことができます。

◆単元の構成

ポイント ⇒ 確認問題 ⇒ 練成問題の順に構成されています。

- **ポイント** 単元内の項目を細かく分類し、重要事項・用語の説明や基本的な問題の解法が示されています。
- **確認問題** ポイントで学習した内容を確認し、定着を図れます。
- **練成問題** ポイント ⇒ 確認問題で学習した内容を確認するための問題です。

CONTENTS

1 整式の計算

- 整式
- 整式の加法・減法
- 整式の乗法
- 乗法公式Ⅰ
- 乗法公式Ⅱ
- 乗法公式Ⅲ
- 乗法公式Ⅳ
- いろいろな展開Ⅰ
- いろいろな展開Ⅱ

2

分母の有理化

式の値

- ### 4 1次不等式
- 不等式
 - 不等式の性質
 - 不等式の解法Ⅰ
 - 不等式の解法Ⅱ
 - 不等式の応用Ⅰ
 - 不等式の応用Ⅱ

20

2 因数分解

- 共通因数、因数分解の公式Ⅰ
- 因数分解の公式Ⅱ
- 因数分解の公式Ⅲ
- いろいろな因数分解Ⅰ
- いろいろな因数分解Ⅱ
- いろいろな因数分解Ⅲ
- いろいろな因数分解Ⅳ

8

5 連立不等式

- 連立不等式の解法Ⅰ
- 連立不等式の解法Ⅱ
- 連立不等式の応用Ⅰ
- 連立不等式の応用Ⅱ
- 絶対値を含む方程式・不等式

26

3 実数

- 実数
- 数直線と絶対値
- 平方根

14

6 2次方程式

- 2次方程式の解法Ⅰ
- 2次方程式の解法Ⅱ
- 2次方程式の解法Ⅲ
- 2次方程式の解の個数
- 2次方程式の解と定数
- 2次方程式の応用

32

重要事項のまとめ

38

1

整式の計算

● ポイント 1 整式

◆ **単項式と多項式**……数や文字の積で表された式を**単項式**という。また、単項式の和として表される式を**多項式**といい、各単項式をその多項式の項という。単項式と多項式を合わせたものを**整式**という。

◆ **同類項**……多項式の中で文字の部分が同じ項を**同類項**という。同類項はまとめることができる。

例 $3a^2 - ab + 2b^2 + 5ab - 3b^2 + 4a^2 = (3+4)a^2 + (-1+5)ab + (2-3)b^2 = 7a^2 + 4ab - b^2$

◆ **次数**……単項式では、掛け合わされた文字の個数を**次数**、数の部分を**係数**という。多項式では、各項の次数のうち最高のものをその多項式の次数という。また、多項式では、次数が0の項を**定数項**という。

◆ **特定の文字に着目**……ある特定の文字に着目して、他の文字を数と見なして取り扱うことがある。

例 ① $-3x^3y^2 - 3x^3y^2 = -3 \times x \times x \times x \times y \times y$ より、文字5個の積だから、次数5、係数-3
xに着目すると、 $-3x^3y^2 = (-3 \times y \times y) \times x \times x \times x$ だから、次数3、係数-3y²

② $a^3 - 4a^2b^2 + 5b^3 - 2$ a^3 は3次、 $-4a^2b^2$ は4次、 $5b^3$ は3次だから、次数4、定数項-2
bに着目すると、 a^3 は0次、 $-4a^2b^2$ は2次、 $5b^3$ は3次、-2は0次だから、次数3、定数項 $a^3 - 2$

◆ **多項式の整理**……整式を、項の次数の高い方から順に並べることを**降べきの順**に整理するといい、項の次数の低い方から順に並べることを**昇べきの順**に整理するという。

例 $x^2 + 2xy + 5y^2 - 3x + y + 1$ $\left\{ \begin{array}{l} x \text{について降べきの順に整理} \Rightarrow x^2 + (2y-3)x + 5y^2 + y + 1 \\ y \text{について降べきの順に整理} \Rightarrow 5y^2 + (2x+1)y + x^2 - 3x + 1 \end{array} \right.$

● 確認問題 1 ● 次の問い合わせに答えなさい。

□(1) 次の多項式の同類項をまとめて整理しなさい。

□① $6x - 9x + x$ □② $3a^2 - a + 1 + a^2 - 5a$ □③ $2x^2 - xy - 7y^2 + 4xy - y^2 + 6x^2$

□(2) 次の単項式の次数と係数を答えなさい。また、〔 〕内の文字に着目したときの次数と係数を答えなさい。

□① $2x^2y$ [y] □② $-a^3b^2$ [a]

□③ $\frac{1}{3}ax^2y^2$ [x] □④ $-\frac{3}{7}xy^2z^3$ [xとz]

□(3) 次の多項式の次数を答えなさい。また、〔 〕内の文字に着目したときの次数と定数項を答えなさい。

□① $ab + bc + ca$ [a] □② $x^3 + 2x^2y - 3y^2$ [y]

□③ $3ax^3 - abx^2 + 4ax - ab^3$ [x] □④ $a^2 - 3ab^2 + 4a^2b - ab - 9$ [b]

□(4) 次の式を、xについて降べきの順に整理しなさい。

□① $x^3 + 5x - 1 - 3x^2$ □② $2ax + a - x^2 - bx$

□③ $4x^2 - xy + 3y^2 - x - 2y + 1$ □④ $x^3 - 3xy + 7x^2y - 3 + x^2 + 4x$

● ポイント 2 整式の加法・減法

◆ 整式の計算法則……多項式の加法・減法・乗法は、次の計算法則をもとに行う。

- | | | | |
|--------|--|-----|-----------------|
| ① 交換法則 | $A + B = B + A$ | $ $ | $AB = BA$ |
| ② 結合法則 | $(A + B) + C = A + (B + C)$ | $ $ | $(AB)C = A(BC)$ |
| ③ 分配法則 | $A(B + C) = AB + AC, (A + B)C = AC + BC$ | | |

〔例題〕 $A = 2x^2 - 3xy + y^2, B = 5x^2 + 4xy - 3y^2$ のとき、 $A - B, -3A + 2B$ を計算しなさい。

〔解法〕 A, B に整式を代入するときは、かっこをつけて代入する。

$$\begin{aligned} A - B &= (2x^2 - 3xy + y^2) - (5x^2 + 4xy - 3y^2) & -3A + 2B &= -3(2x^2 - 3xy + y^2) + 2(5x^2 + 4xy - 3y^2) \\ &= 2x^2 - 3xy + y^2 - 5x^2 - 4xy + 3y^2 & &= -6x^2 + 9xy - 3y^2 + 10x^2 + 8xy - 6y^2 \\ &= (2 - 5)x^2 + (-3 - 4)xy + (1 + 3)y^2 & &= (-6 + 10)x^2 + (9 + 8)xy + (-3 - 6)y^2 \\ &= -3x^2 - 7xy + 4y^2 & &= 4x^2 + 17xy - 9y^2 \end{aligned}$$

● 確認問題 2 次の整式 A, B について、 $A + B, A - B, 2A - 3B$ をそれぞれ計算しなさい。

□(1) $A = 2a^2 - 7a - 3, B = a^2 + 5a - 4$

□(2) $A = x^2 + 4xy - y^2, B = -3x^2 - xy + 2y^2$

● ポイント 3 整式の乗法

◆ 指数法則…… m, n が正の整数のとき、次の指数法則が成り立つ。

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

〔例〕 ① $3x^3 \times 5x^4 = 3 \times 5 \times x^3 \times x^4$
 $= 15x^{3+4}$
 $= 15x^7$

② $(-3ab)^2 \times (-2a^2b)^3 = (-3)^2 a^2 b^2 \times (-2)^3 (a^2)^3 b^3$
 $= 9a^2 b^2 \times (-8)a^{2 \cdot 3} b^3$
 $= 9 \cdot (-8)a^{2+6} b^{2+3} = -72a^8 b^5$

※ $2 \cdot 3$ の \cdot は、積を表す記号である。

◆ 多項式の乗法……単項式と多項式の積、多項式と多項式の積は分配法則を利用する。

〔例〕 ① $3ab(a^2 - 2b)$
 $= 3ab \cdot a^2 - 3ab \cdot 2b$
 $= 3a^3b - 6ab^2$

② $(2x - 3)(x^2 - x + 4) = 2x(x^2 - x + 4) - 3(x^2 - x + 4)$
 $= 2x^3 - 2x^2 + 8x - 3x^2 + 3x - 12$
 $= 2x^3 - 5x^2 + 11x - 12$

● 確認問題 3 次の問いに答えなさい。

□(1) 次の計算をしなさい。

□① $a^2 \times a^4$

□② $(x^3)^4$

□③ $(-5ab^3)^2$

□④ $3xy^2 \times (-4x^3y^5)$

□⑤ $(-2a^2b)^4 \times 5a^2b$

□⑥ $(-xy)^2 \times (-3x^3y^2)^3$

□(2) 次の計算をしなさい。

□① $2x^2y(3x - 4y)$

□② $a(4a - 3b) - 5b(a + 2b)$

□③ $(x - 2)(x^2 + 3x - 5)$

□④ $(x^2 - 2xy + 3y^2)(x + 4y)$

● ポイント 4 乗法公式 I

- ◆ 基本的な乗法公式……中学で既に学習したもの。

$$\text{① } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{② } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\text{③ } (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

例 ① $(x+3)^2$

$$= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2$$

$$= x^2 + 6x + 9$$

② $(3x-4y)^2$

$$= (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4y + (4y)^2$$

$$= 9x^2 - 24xy + 16y^2$$

③ $(3a+b)(3a-b)$

$$= (3a)^2 - b^2$$

$$= 9a^2 - b^2$$

④ $(x-5)(x+3)$

$$= x^2 + (-5+3)x + (-5) \cdot 3$$

$$= x^2 - 2x - 15$$

⑤ $(2x+3y)(2x-y)$

$$= (2x)^2 + (3y-y) \cdot 2x + 3y \cdot (-y)$$

$$= 4x^2 + 4xy - 3y^2$$

● 確認問題 4

次の式を展開しなさい。

(1) $(x+7)^2$

(2) $(a+5b)^2$

(3) $(2x+3y)^2$

(4) $(x-6)^2$

(5) $(4x-y)^2$

(6) $(5a-2b)^2$

(7) $(x+9)(x-9)$

(8) $(x-8y)(x+8y)$

(9) $(7a+2b)(7a-2b)$

(10) $(x+3)(x+6)$

(11) $(x-5)(x-2)$

(12) $(x+9)(x-8)$

(13) $(x-8y)(x+3y)$

(14) $(2x-3)(2x-5)$

(15) $(3x+7y)(3x-y)$

● ポイント 5 乗法公式 II

- ◆ 1次式 $ax+b$ と $cx+d$ の積の乗法公式……次の展開結果から、乗法公式④が得られる。

$$(ax+b)(cx+d) = ax(cx+d) + b(cx+d) = acx^2 + adx + bcx + bd = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

④ $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

例 ① $(x+4)(2x+7)$

$$= 1 \cdot 2x^2 + (1 \cdot 7 + 4 \cdot 2)x + 4 \cdot 7$$

$$= 2x^2 + 15x + 28$$

② $(3x+2y)(4x-3y)$

$$= 3 \cdot 4x^2 + \{3 \cdot (-3y) + (2y) \cdot 4\} x + 2y \cdot (-3y)$$

$$= 12x^2 - xy - 6y^2$$

● 確認問題 5

次の式を展開しなさい。

(1) $(x+2)(2x+3)$

(2) $(x-4)(3x+1)$

(3) $(2x-3)(x-7)$

(4) $(3x+5)(x-2)$

(5) $(2x-1)(5x-3)$

(6) $(4x+3)(3x+2)$

(7) $(x+y)(3x-2y)$

(8) $(3x-8y)(2x+y)$

(9) $(5x-y)(3x-4y)$

● ポイント 6 乗法公式Ⅲ

◆ 3乗の和・差になる乗法公式……次の展開結果から、乗法公式⑤が得られる。

$$\begin{aligned}
 & (a+b)(a^2-ab+b^2) & (a-b)(a^2+ab+b^2) \\
 = & a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2) & = a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2) \\
 = & a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3 & = a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3 \\
 \textcircled{5} \quad & (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 & (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \\
 \text{例} \quad & \textcircled{1} \quad (x+2)(x^2-2x+4) & \textcircled{2} \quad (x-3y)(x^2+3xy+9y^2) \\
 = & (x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2) & = (x-3y) \{x^2+x\cdot 3y+(3y)^2\} \\
 = & x^3+2^3=x^3+8 & = x^3-(3y)^3=x^3-27y^3
 \end{aligned}$$

● 確認問題 6

次の式を展開しなさい。

- | | | |
|---|---|---|
| <input type="checkbox"/> (1) $(x+1)(x^2-x+1)$ | <input type="checkbox"/> (2) $(x+5)(x^2-5x+25)$ | <input type="checkbox"/> (3) $(x+4y)(x^2-4xy+16y^2)$ |
| <input type="checkbox"/> (4) $(x-2)(x^2+2x+4)$ | <input type="checkbox"/> (5) $(x-6)(x^2+6x+36)$ | <input type="checkbox"/> (6) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ |
| <input type="checkbox"/> (7) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$ | | <input type="checkbox"/> (8) $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$ |

● ポイント 7 乗法公式Ⅳ

◆ 和・差の3乗の乗法公式…… $(a+b)^3$, $(a-b)^3$ の展開結果から、乗法公式⑥が得られる。

$$\begin{aligned}
 (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 & (a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 \\
 &= (a+b)(a^2+2ab+b^2) & &= (a-b)(a^2-2ab+b^2) \\
 &= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2) & &= a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2) \\
 &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 & &= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3 \\
 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{6} \quad (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

例 ① $(x+2)^3$

$$\begin{aligned}
 &= x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3 \\
 &= x^3+6x^2+12x+8
 \end{aligned}$$

② $(3x-2y)^3$

$$\begin{aligned}
 &= (3x)^3-3\cdot (3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot (2y)^2-(2y)^3 \\
 &= 27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3
 \end{aligned}$$

● 確認問題 7

次の式を展開しなさい。

- | | | |
|---|---|--|
| <input type="checkbox"/> (1) $(x+1)^3$ | <input type="checkbox"/> (2) $(x+4)^3$ | <input type="checkbox"/> (3) $(x+3y)^3$ |
| <input type="checkbox"/> (4) $(x-2)^3$ | <input type="checkbox"/> (5) $(x-6)^3$ | <input type="checkbox"/> (6) $(x-5y)^3$ |
| <input type="checkbox"/> (7) $(3x+1)^3$ | <input type="checkbox"/> (8) $(2x-3)^3$ | <input type="checkbox"/> (9) $(3x-4y)^3$ |

6 1. 整式の計算

● ポイント 8 いろいろな展開 I

例題 次の式を展開しなさい。

$$(1) (a-b+c)^2$$

$$(2) (x+y-z)(x-y+z)$$

解法 多項式の一部を1つの文字に置き換える、乗法公式を利用して展開する。

$$(1) a-b=X \text{ とおくと},$$

$$(a-b+c)^2 = (X+c)^2$$

$$\begin{aligned} &= X^2 + 2cX + c^2 \\ &= (a-b)^2 + 2c(a-b) + c^2 \quad \boxed{X \text{ を } a-b} \\ &= a^2 - 2ab + b^2 + 2ca - 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca \end{aligned}$$

$$(2) (x+y-z)(x-y+z)$$

$$= \{x+(y-z)\} \{x-(y-z)\}$$

$$\begin{aligned} &\text{ここで, } y-z=X \text{ とおくと,} \\ &= (x+X)(x-X) = x^2 - X^2 \quad \boxed{X \text{ を } y-z} \\ &= x^2 - (y-z)^2 \quad \boxed{\text{に戻す。}} \\ &= x^2 - y^2 - z^2 + 2yz \end{aligned}$$

● 確認問題 8

次の式を展開しなさい。

$$\square(1) (a+b+c)^2$$

$$\square(2) (x-y-3)^2$$

$$\square(3) (x-3y+2z)^2$$

$$\square(4) (x+y+5)(x+y-5)$$

$$\square(5) (2a+b+3)(2a+b-2)$$

$$\square(6) (x^2-x-3)(x^2-x+1)$$

$$\square(7) (x+y+2)(x-y+2)$$

$$\square(8) (a+b+c)(a-b-c)$$

$$\square(9) (x-3y+1)(x+3y-1)$$

● ポイント 9 いろいろな展開 II

例題 次の式を展開しなさい。

$$(1) (x+y)^2(x-y)^2$$

$$(2) (x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$$

解法 積の組み合わせを工夫して、効率よく展開する。

$$(1) (x+y)^2(x-y)^2$$

$$= \{(x+y)(x-y)\}^2$$

$$= (x^2 - y^2)^2$$

$$= (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot y^2 + (y^2)^2$$

$$= x^4 - 2x^2y^2 + y^4$$

$$(2) (x-1)(x+2)(x-3)(x+4) \quad \boxed{(x-1) \text{ と } (x+2), (x-3) \text{ と } (x+4)}$$

$$= (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 12)$$

$$= \text{ここで, } x^2 + x = X \text{ とおくと,}$$

$$= (X-2)(X-12) = X^2 - 14X + 24$$

$$= (x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24$$

$$\quad \boxed{\text{をそれぞれ組み合わせる。}}$$

$$\quad \boxed{X \text{ を } x^2 + x \text{ に戻す。}}$$

● 確認問題 9

次の式を展開しなさい。

$$\square(1) (x+3)^2(x-3)^2$$

$$\square(2) (a+2b)^2(a-2b)^2$$

$$\square(3) (x-1)^3(x+1)^3$$

$$\square(4) (x+2)(x-2)(x^2+4)$$

$$\square(5) (9x^2+y^2)(3x+y)(3x-y)$$

$$\square(6) (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)$$

$$\square(7) (x-2)(x-5)(x-3)(x-4)$$

練成問題

1 次の整式の同類項をまとめなさい。また、〔 〕内の文字に着目したとき、その次数と定数項を答えなさい。

(1) $3x - y - 8x + 2x^2 + 2y - x^2$ [x]

(2) $a^2b^2 + 4ab - ab - 3a^2b^2 - 6a - 2b + 1$ [b]

(3) $x^3 - 3xy^2 - 5xy + 2ay + y^3 - 2xy - ay - 3$ [y]

2 $A = x^2 - 4xy - 3y^2$, $B = 2x^2 - xy - y^2$, $C = -x^2 + y^2$ のとき、次の計算をしなさい。

(1) $A + B - C$

(2) $2A - B + 5C$

3 次の(1)～(3)を計算しなさい。また、(4)～(18)の式を展開しなさい。

(1) $3x^4 \times (-7x^5)$

(2) $5a^2b^3 \times (2a^3b)^3$

(3) $(-2xy^2)^2 \times (-3x^2y)^4$

(4) $-ab(2a^2 - b + 5)$

(5) $(x - 3y)(x^2 - 2xy - 5y^2)$

(6) $(a + 7b)^2$

(7) $(4x - 5y)^2$

(8) $(2a + 5)(2a - 5)$

(9) $(3x - 7y)(3x + 7y)$

(10) $(x + 7y)(x - 6y)$

(11) $(2a - 8)(2a - 3)$

(12) $(2x - 5)(3x + 4)$

(13) $(3x + 8)(4x - 5)$

(14) $(4a - 3b)(5a - b)$

(15) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$

(16) $(3a - 5b)(9a^2 + 15ab + 25b^2)$

(17) $(a + 4b)^3$

(18) $(2x - 5y)^3$

4 次の式を展開しなさい。

(1) $(2a - b - c)^2$

(2) $(x + 2y + 5)(x + 2y - 5)$

(3) $(a - 3b - 1)(a - 3b + 3)$

(4) $(x^2 + 4x - 1)(x^2 - 4x + 1)$

(5) $(a - 2b)(a + 2b)(a^2 + 4b^2)$

(6) $(3x + 1)^2(3x - 1)^2$

(7) $(x + 1)^2(x - 3)^2$

(8) $(a - b)^2(a + b)^2(a^2 + b^2)^2$

(9) $(x + 2)^2(x^2 - 2x + 4)^2$

(10) $(x - 1)^2(x^2 + x + 1)^2$

(11) $(x - 2)^3(x + 2)^3$

(12) $(x + 1)(x + 3)(x - 5)(x - 7)$