数学

中学３年

発 展 編

本書の構成と特色

■ **全体の構成**　全体は，**3年の学習内容の復習と予習**（単元１～6），**分野別演習**（単元７～10），**総合演習**（単元11～13）の３つに分かれています。

■ **単元の構成**　単元１～6は，**ポイント → 確認問題 → 練成問題 → 発展問題**の４ステップで構成され，3年の主な学習内容の理解が深まるように構成されています。発展問題には出題校名が入っています。

単元７～10は，１～２年の学習内容も含めて，分野別に実戦的な演習ができるようになっています。大問の最初には，問題を解く上で必要な，主な学習内容が示してあります。また，すべての問題に出題校名が入っています。

単元11～13は，実際の入試に近い，総合問題形式の演習になっています。

目 次

◆単元番号に＊のついた単元には，巻末に単元別テストがついています。

1 式の展開・因数分解

■学習日　　/

ポイント① 式の展開

例 次の計算をせよ。

(1) $(a+2b-3c)(a-2b+3c)+(3c-2b)^2$

$= \{a+(2b-3c)\}\{a-(2b-3c)\}+(3c-2b)^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$=a^2-(2b-3c)^2+(3c-2b)^2$

$(a-b)^2=(b-a)^2$

$=a^2$

(2) $(x+1)^2(x-1)^2$

$a^2b^2=(ab)^2$

$=\{(x+1)(x-1)\}^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$=(x^2-1)^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$=x^4-2x^2+1$

■確認問題 1■ 次の計算をせよ。

□(1) $(x-5)^2$　〔　　〕

□(2) $(2x-y)^2$　〔　　〕

□(3) $(x-6)(x+6)$　〔　　〕

□(4) $(x-2y)(x+2y)$　〔　　〕

□(5) $(x+4)(x+3)$　〔　　〕

□(6) $(x-1)(x-7)$　〔　　〕

□(7) $(x-5)(x+6)$　〔　　〕

□(8) $(x+2)(x-3)$　〔　　〕

□(9) $(x+2)(x-2)-x^2$　〔　　〕

□(10) $(x-y)^2-x(x-2y)$　〔　　〕

□(11) $(x-1)(x+3)-(x-1)^2$　〔　　〕

□(12) $(a-2b)^2-(a+b)(a-5b)$　〔　　〕

□(13) $(2x-3y)^2+(3x+4y)^2$　〔　　〕

□(14) $3(x-1)^2+(2x+1)(x-3)$　〔　　〕

□(15) $(x-y+z)(x+y-z)+(y-z)^2$　〔　　〕

□(16) $(a-b+2)^2-(a-b)(a-b+3)$　〔　　〕

□(17) $(a+b+c)(-a+b+c)-(a+b-c)(a-b+c)$　〔　　〕

□(18) $3(a-b)^2-(3a-b)(a-b)+(a-b)(a+b)$　〔　　〕

□(19) $(a+b)^2(a-b)^2(a^2+b^2)^2$　〔　　〕

□(20) $\dfrac{(x-y)(2x+y)}{3}-\dfrac{(x+y)(x-2y)}{2}-\dfrac{(x+2y)^2}{6}$　〔　　〕

ポイント② 因数分解

例 次の式を因数分解せよ。

(1) $\boldsymbol{x^2+xy-2x-y+1}$

$=(xy-y)+(x^2-2x+1)$

x の次数は2，y の次数は1なので，次数の低い y について，含む項と含まない項に分ける。

$=y(x-1)+(x-1)^2$

それぞれの部分を因数分解する。

$=(x+y-1)(x-1)$

共通因数$(x-1)$でくくる。

(2) $\boldsymbol{(x^2-x)^2-(x^2-x)-2}$

$=(x^2-x-2)(x^2-x+1)$

x^2-x を1かたまりと考えて，公式を使って因数分解する。

$=(x-2)(x+1)(x^2-x+1)$

前のかっこ内をさらに因数分解する。
(後のかっこ内はこれ以上因数分解できない。)

(3) $\boldsymbol{x^4-3x^2+1}$

$=x^4-2x^2+1-x^2$

$3x^2=2x^2+x^2$

$=(x^2-1)^2-x^2$

前の3項を，公式を使って因数分解する。

$=(x^2+x-1)(x^2-x-1)$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

確認問題2　次の式を因数分解せよ。

□(1) $(m+1)x+(m+1)y$
〔　　　　〕

□(2) $9a^2-4b^2$
〔　　　　〕

□(3) $25x^2-20x+4$
〔　　　　〕

□(4) $x^2+9x-52$
〔　　　　〕

□(5) $mx^2+3mx-4m$
〔　　　　〕

□(6) $a^4b-3a^3b^2-4a^2b^3$
〔　　　　〕

□(7) $(x+2y)(x-2y)-3xy$
〔　　　　〕

□(8) $(4-x)(x-9)+2x(x-11)$
〔　　　　〕

□(9) $(x+y)^2+4(x+y)-21$
〔　　　　〕

□(10) $(x+1)^2+2(x+1)-8$
〔　　　　〕

□(11) $(7x+3)^2-y^2$
〔　　　　〕

□(12) $(a-b)^2-(c-a)^2$
〔　　　　〕

□(13) $x^2+xy+y-1$
〔　　　　〕

□(14) $xy-4+4y-x$
〔　　　　〕

□(15) x^2-y^2+2y-1
〔　　　　〕

□(16) $xy-xz-z^2+2yz-y^2$
〔　　　　〕

□(17) $(x^2-x)^2-6(x^2-x)$
〔　　　　〕

□(18) $4a^2(x-y)+b^2(y-x)$
〔　　　　〕

□(19) $(2x+1)^2-(x+2)^2-2x(x+1)$
〔　　　　〕

□(20) $(3x-y)(x+y)-(x+y)^2-(x-y)^2$
〔　　　　〕

□(21) $(xy+1)^2-(x+y)^2$
〔　　　　〕

□(22) $x^2(x-1)^2-5x(x-1)-6$
〔　　　　〕

□(23) $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3$
〔　　　　〕

□(24) x^4-2x^2+1
〔　　　　〕

練成問題

1 次の計算をせよ。

□(1) $(-2a+3)(4a^2-5a+6)$
〔　　〕

□(2) $(a+2)(b-3)-(4ab-6a^2)\div 2a$
〔　　〕

□(3) $(x-2y)^2+(2x+y)(2x-y)-(x-y)(3x-y)$
〔　　〕

□(4) $(x-4y+2)(x-4y-2)-(x-2y)(x+8y)$
〔　　〕

□(5) $(2x+y)(2x-y)+(x-2y)^2-(8x^3y^2-4xy^4)\div 2xy^2$
〔　　〕

□(6) $(2a-3b)^2-(2a+3b)(a-5b)-2(-a-2b)(-a+2b)$
〔　　〕

□(7) $\dfrac{(x+3y+1)(x+3y-1)}{6}-\dfrac{(3y-x)(x+y)}{2}$
〔　　〕

2 次の式を因数分解せよ。

□(1) $a^2(a-2b)+4(2b-a)$
〔　　〕

□(2) $x^2(y-1)+3x(1-y)+2(y-1)$
〔　　〕

□(3) $x^4-3x^2y^2-4y^4$
〔　　〕

□(4) $(x^2-3)^2-(x^2-5)^2+(x-2)$
〔　　〕

□(5) $x^2z^2-y^2z^2-4x^2+4y^2$
〔　　〕

□(6) $2a^2+3ab+b^2-4a-2b$
〔　　〕

□(7) $(a-b+c)^2-2(c+d)(b-a-c)-3(c+d)^2$
〔　　〕

□(8) $(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)+3$
〔　　〕

3 次の問いに答えよ。

□(1) 次の計算をせよ。

□① $365\times 363+366^2-366\times 364-364^2$
〔　　〕

□② $\dfrac{120^2-97^2}{91^2-70^2}$
〔　　〕

□(2) $(ax-3)(4x+b)=cx^2+2x-21$（ただし，a，b，c は定数）のとき，c の値を求めよ。
〔　　〕

□(3) $(x^2+ax+b)(x^2-3x+4)$ を展開したとき，x^2 の係数が 13，x の係数が -2 となった。このとき，a，b の値を求めよ。
〔$a=$　　，$b=$　　〕

□(4) $x+\dfrac{1}{x}=5$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ の値を求めよ。
〔　　〕

□(5) $x+y=a$，$x-y=b$ のとき，$x^3-x^2y+xy^2-y^3$ を，a，b の式で表せ。
〔　　〕

発展問題

1 次の計算をせよ。

□(1) $(2a+1)(4a^2-2a+1)$ 〈東海大浦安〉

□(2) $(2x+3y-4)(2x-3y+4)$ 〈岩倉〉

□(3) $(a+2b)^2-(a+5b)(a-b)$ 〈日大第三〉

□(4) $4(2a-b)^2-(b-2a)^2$ 〈明星〉

□(5) $(3x-4y)(3x+y)-(3x-2y)^2$ 〈桐朋〉

□(6) $\left(a-b+\dfrac{1}{2}\right)\left(a+b-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{4}$ 〈東京工業〉

□(7) $\left(\dfrac{2x+y}{3}-\dfrac{x-2y}{4}\right)\left(\dfrac{x-3y}{4}+\dfrac{3x+y}{3}\right)+\left(\dfrac{5}{12}\right)^2(x+5y)y$ 〈大阪教育大附平野〉

□(8) $(x+1)(3-x)-\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{2}+\dfrac{(1-3x)^2}{3}$ 〈慶應〉

2 次の式を因数分解せよ。

□(1) $2(5x-3)-(2-x)(x+3)$ 〈筑波大附〉

□(2) $75a^3b^2-60a^2b^3+12ab^4$ 〈高知学芸〉

□(3) $(2a-b)^2-(a+2b)^2$ 〈法政一高〉

□(4) $x^2-(y+1)^2-(x-y-1)z$ 〈早大本庄〉

□(5) $ax-by+bx-ay-2x+2y$ 〈清風南海〉

□(6) $3x^2y+4x^2-12y-16$ 〈東大寺学園〉

□(7) $x^2-(1+4a)x+4a^2+2a-2$ 〈浅野〉

□(8) $\dfrac{5}{6}ax+\dfrac{5}{2}ay-\dfrac{1}{3}bx-by$ 〈同志社〉

□(9) $x^3y+xy^3-x^3-xy^2+x^2y+y^3$ 〈ラ・サール〉

□(10) $b(4a^2+2bc-cd-2)-d(2a^2-1)$ 〈灘〉

3 次の問いに答えよ。

□(1) $ab=-2$，$(a+2)(b+2)=8$ のとき，$a^3+b^3+a^2b+ab^2$ の値を求めよ。 〈明大付明治〉

□(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$のとき，$\dfrac{5x-2xy+5y}{x+y}$ の値を求めよ。 〈東大寺学園〉

□(3) $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{3}$（ただし，$xy=0$ の場合を除く）のとき，$\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ の値を求めよ。 〈近畿大附〉

□(4) $x^2-4xy+4y^2=0$（ただし，$x=y=0$ の場合を除く）のとき，$\dfrac{x^2+3xy-y^2}{x^2+2y^2}$ の値を求めよ。 〈開成〉

□(5) 次の①，②に答えよ。 〈修道〉

□① $xy+3x-2y-6$ を因数分解せよ。

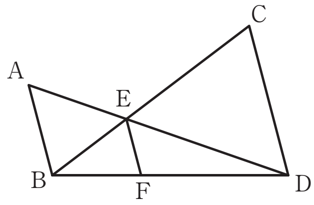
□② x，y が 0 以上の整数のとき，$xy+3x-2y-12=0$ を満たす x，y の値の組をすべて求めよ。

5 相似と円周角の定理

■学習日　　/

ポイント① 図形の相似，平行線と線分の比

例 右の図で，AB∥EF∥CD である。次の問いに答えよ。



⑴ **△ABE∽△DCE であることを証明せよ。**

△ABE と△DCE において，平行線の錯角は等しいから，

∠ABE＝∠DCE…①，∠BAE＝∠CDE…②

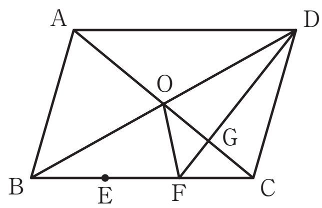
①，②より，2組の角がそれぞれ等しいから，△ABE∽△DCE

⑵ **AB＝6㎝，DC＝10㎝のとき，EF の長さを求めよ。**

AE：DE＝AB：DC＝6：10＝3：5，また△ABD と△EFD において，AB∥EF より平行線の同位角が等しいから，∠DAB＝∠DEF，∠DBA＝∠DFE より2組の角がそれぞれ等しいから△ABD∽△EFD

これより AB：EF＝DA：DE＝(5＋3)：5＝8：5，6：EF＝8：5，EF＝$\frac{15}{4}$(㎝)

■確認問題1■ 右の図の四角形 ABCD は平行四辺形で，辺 BC を三等分する点を E，F とする。対角線 AC と線分 DF の交点を G とし，対角線の交点を O とする。AC＝12㎝のとき，次の問いに答えよ。



□⑴ OG の長さを求めよ。

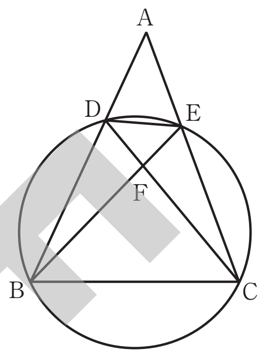
〔　　　　　〕

□⑵ △OFG の面積は，平行四辺形 ABCD の面積の何倍か。

〔　　　　　〕

ポイント② 円周角

例 △ABC の2つの頂点 B，C を通る円と辺 AB，AC との交点を D，E とし，線分 BE と線分 CD の交点を F とする。これについて次の問いに答えよ。



⑴ **∠ABE＝21°，∠BEC＝65°のとき，∠BFC の大きさを求めよ。**

$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角より，∠BDC＝∠BEC＝65°→∠BFC は

△BFD の外角なので，∠BFC＝∠ABE＋∠BDC＝21°＋65°＝86°

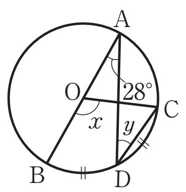
⑵ **AB＝7㎝，BC＝5㎝，CA＝6㎝，AD＝2.4㎝のとき，ED の長さを求めよ。**

△ABC と△AED において，∠A は共通，四角形 BCED は円に内接するので，∠ABC＝∠AED →△ABC∽△AED

BC：ED＝AC：AD → 5：ED＝6：2.4 → ED＝2.4×5÷6＝2 (㎝)

■確認問題2■ 次の∠x，∠y の大きさをそれぞれ求めよ。ただし，O は円の中心であり，同じ印をつけた長さは等しい。

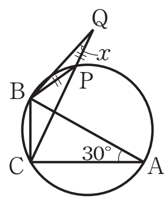
□⑴



〔∠x＝　　　　　〕

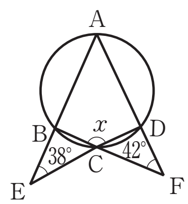
〔∠y＝　　　　　〕

□⑵



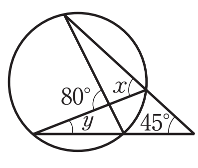
〔∠x＝　　　　　〕

□⑶



〔∠x＝　　　　　〕

□⑷

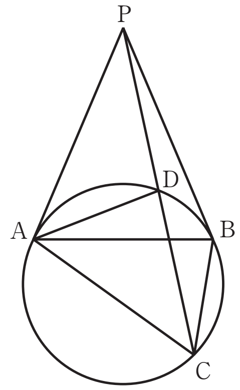


〔∠x＝　　　　　〕

〔∠y＝　　　　　〕

ポイント③　円と接線

例　**円に内接する△ABC の頂点 A，B における円の接線の交点を P とし，線分 CP と円の交点を D とする。これについて次の問いに答えよ。**



⑴　**∠APB＝50°のとき，∠ACB の大きさを求めよ。**

円外の1点から円に引いた接線の長さは等しいので，PA＝PB→∠PAB＝∠PBA＝(180°－50°)÷2＝65°

接線と弦がなす角は，その角の内側にある弧に対する円周角に等しい(接弦定理)ので，∠ACB＝∠PAB＝65°

⑵　**AP＝3 cm，AC＝2.4 cm，CP＝4 cmのとき，AD の長さを求めよ。**

△PAD と△PCA について，∠APD は共通，接弦定理より

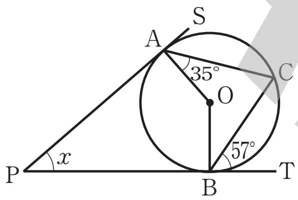
∠PAD＝∠PCA→△PAD∽△PCA→AD：CA＝AP：CP

→AD：2.4＝3：4→AD＝2.4×3÷4＝1.8 (cm)

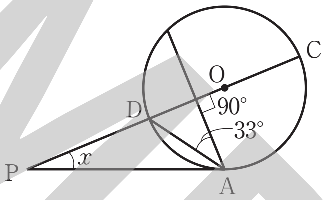
■確認問題3■　**次の問いに答えよ。**

□⑴　次の∠x の大きさをそれぞれ求めよ。ただし，O は円の中心であり，AP，BP，CQ，DQ は円 O の接線である。

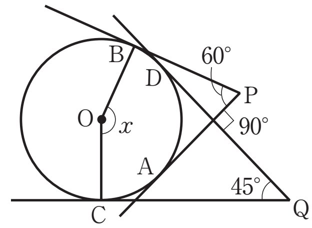
□①



□②

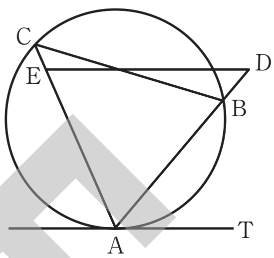


□③



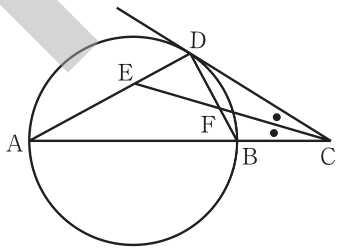
〔　　　　　〕　〔　　　　　〕　〔　　　　　〕

□⑵　右の図のように，円に内接した△ABC の頂点 A における接線を AT とし，辺 AB の延長上に AD＝AC となる点 D をとり，点 D を通り接線 AT に平行な直線と辺 AC の交点を E とする。このとき，△ABC≡△AED であることを証明せよ。



〔　　　　　　　　　　　　　　　　　　〕

□⑶　右の図のように，円の直径 AB の延長上の点 C から引いた接線を CD とし，∠ACD の二等分線と線分 AD，BD との交点をそれぞれ E，F とする。このとき次の①～③に答えよ。



□①　△AEC と相似な三角形を答えよ。

〔　　　　　〕

□②　△DEF が二等辺三角形であることを証明せよ。

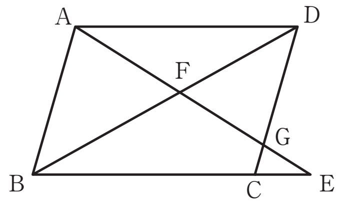
〔　　　　　　　　　　　　　　　　　　〕

□③　∠AEC の大きさを求めよ。

〔　　　　　〕

練成問題

1 **右の図の四角形 ABCD は平行四辺形で，辺 BC の C の方への延長上に，BC＝4CE となる点 E をとる。線分 AE と対角線 BD との交点を F，辺 CD との交点を G とする。AE＝45 ㎝のとき，次の問いに答えよ。**



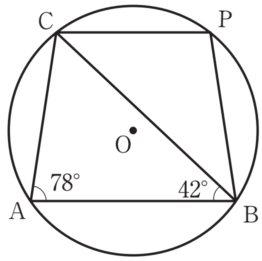
□(1)　FG の長さを求めよ。

〔　　　　　〕

□(2)　△DFG の面積は，平行四辺形 ABCD の面積の何倍か。

〔　　　　　〕

2 **∠A＝78°，∠B＝42° である△ABC の外接円 O の $\overset{\frown}{BC}$(BC に対して A と反対側の弧)上を動く点を P とするとき，次の問いに答えよ。**



□(1)　PC∥AB となるときの∠ POC の大きさを求めよ。

〔　　　　　〕

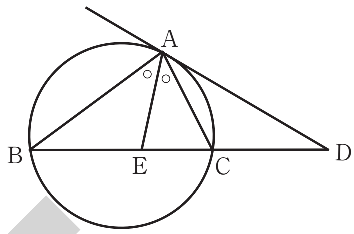
□(2)　四角形 ABPC の面積が最大となるときの∠PCA の大きさを求めよ。

〔　　　　　〕

□(3)　線分 AP の長さが最大となるときの∠PAC の大きさを求めよ。

〔　　　　　〕

3 **右の図のように，円に内接する△ABC の点 A における円の接線と BC の延長との交点を D とする。また，∠BAC の二等分線と BC の交点を E とする。BC＝5 ㎝，CD＝4 ㎝，∠ADC＝32°，∠ABC＝40° のとき，次の問いに答えよ。**



□(1)　線分 AD の長さを求めよ。

〔　　　　　〕

□(2)　∠ AEC の大きさを求めよ。

〔　　　　　〕

□(3)　線分 BE の長さを求めよ。

〔　　　　　〕

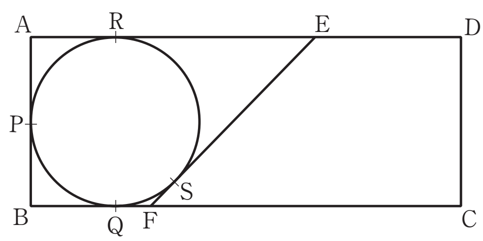
4 **AB＝6 ㎝，AD＝15 ㎝の長方形 ABCD がある。辺 AB，BC，AD にそれぞれ P，Q，R で接する円に，図のように接線を引き，辺 AD，BC との交点をそれぞれ E，F，円との接点を S とするとき，次の問いに答えよ。**

□(1)　EF＝9 ㎝のとき，台形 CDEF の面積を求めよ。

〔　　　　　〕

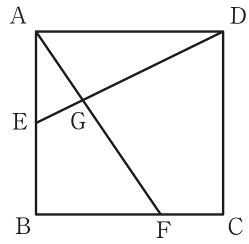
□(2)　台形 CDEF の面積が長方形 ABCD の面積の $\frac{8}{15}$ より大きいとき，接線 EF の長さを x ㎝として，x の値の範囲を求めよ。

〔　　　　　〕



発展問題

1 **1辺が12 ㎝の正方形ABCDにおいて，図のように辺ABの中点EとBC上にBF：FC＝2：1となる点Fをとる。DEとAFの交点をGとするとき，次の問いに答えよ。** 〈東京電機大〉



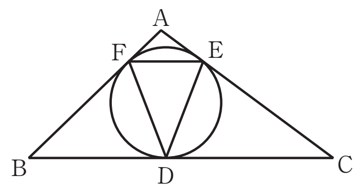
□(1)　EG：GDを最も簡単な整数の比で表せ。

〔　　　　　　〕

□(2)　四角形CDGFの面積を求めよ。

〔　　　　　　〕

2 **AB＝4㎝，BC＝7㎝，CA＝5㎝である△ABCに，円Oが図のように，D，E，Fで各辺に接している。このとき次の問いに答えよ。** 〈ラ・サール〉



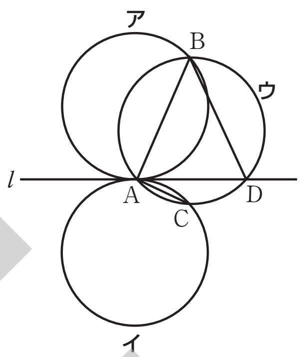
□(1)　面積比△AEF：△ABCを求めよ。

〔　　　　　　〕

□(2)　面積比△DEF：△ABCを求めよ。

〔　　　　　　〕

3 **図のように，半径の等しい3つの円ア，イ，ウがある。円ア，イはともに直線 l 上の点Aで直線 l に接している。円ウは点Aを通り，円ア，イおよび直線 l とそれぞれB，C，Dで交わっている。このとき次の問いに答えよ。** 〈白陵〉



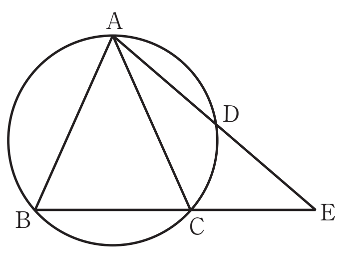
□(1)　△ADBは二等辺三角形であることを証明せよ。

〔　　　　　　〕

□(2)　∠BAC＝90°であることを証明せよ。

〔　　　　　　〕

4 **AB＝AC＝12 ㎝，BC＝10 ㎝の△ABCが円に内接している。この円に弦ADを引き，その延長が底辺BCの延長と交わる点をEとすると，AD＝DEとなった。このとき次の問いに答えよ。** 〈筑波大附〉



□(1)　ADの長さを求めよ。

〔　　　　　　〕

□(2)　CEの長さを求めよ。

〔　　　　　　〕